Université Grenoble Alpes

MAT406 - Mathématiques assistées par ordinateur
Partiel

2 heures **13 mars 2023**

INSTRUCTIONS

- *Calculatrice autorisée, une feuille A4 recto-verso manuscrite autorisée*
- *Tout autre document et appareil électronique interdits*
- *Toute réponse doit être justifiée sauf mention contraire*
- *Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de changer*
- *Le sujet est recto-verso*

Exercice 1 - Point fixe (6 points): On souhaite résoudre l'équation

$$\ln(x+2) = 2 - x, x > 0. \qquad (1)$$

On définit $f : x \mapsto 2 - \ln(x+2)$.
1. Montrer que pour tout $x \in [0,2]$, $f(x) \in [0,2]$.

2. Montrer que (1) admet une unique solution l dans [0, 2] et donner une suite récurrente convergeant vers cette solution.

3. Déterminer un entier n tel que la suite définie à la question précédente vérifie $|u_n - l| < 10^{-5}$ indépendemment du choix de u_0.

4. L'équation (1) a-t-elle des solutions en-dehors de l'intervalle $[0,2]$?

Exercice 2 - Méthode de Newton (9 points): On souhaite résoudre l'équation

$$\exp(-x+2) - 2 - x = 0, \; x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

1. Soit $f : x \mapsto \exp(-x+2) - 2 - x$. Calculer f' et f''.

2. Justifier que la suite définie par la méthode de Newton appliquée la fonction f converge vers une solution de (2), pour certaines valeurs de u_0 qu'on ne cherchera pas à déterminer.

3. Soit $g : x \mapsto f(-x)$. Calculer g' et g''.

4. Justifier que la méthode de Newton permet de résoudre $g(x) = 0$ et indiquer comment choisir un u_0 tel que la suite converge.

5. Choisir une valeur pour u_0, calculer u_3 et donner une majoration théorique de l'erreur $|u_3 - l|$, où l est la solution de $g(x) = 0$.

6. Déduire de ce qui précède une valeur approchée de la solution de l'équation originale (2).

Exercice 3 - Représentation des nombres (5 points):

1. Si n_1 s'écrit 1804 en base 16, écrire n_1 en base 2 puis en base 10.

2. Si n_2 s'écrit 2.6875 en base 10, écrire n_2 en base 2.

3. Comment n_1 et n_2 seraient-ils représentés sur un ordinateur disposant de 10 bits pour la mantisse et 6 pour l'exposant? Si plusieurs représentations sont possibles, on choisira la plus précise. Ces représentations sont-elles exactes? Si non, donner une majoration de l'erreur.