Partiel Mat406 (2 pages)
Licence 2 MAT-MIN - Université Grenoble Alpes

17 mars 2022

- Calculatrice autorisée.
- Une feuille recto-verso A4 manuscrite autorisée.
- Tout autre document, portable, etc. est interdit.
- Barême indicatif : Exercice 1 : 7 points, Exercice 2 : 10 points, Exercice 3 : 3 points.

Exercice 1 - Méthode de point fixe

On définit

$$\begin{array}{llll} f & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & u & \mapsto & (2+u)^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

1. Montrer que l'intervalle $[0,2]$ est stable par f.
2. Donner un majorant k de $|f'|$ sur $[0,2]$.
3. Montrer que f satisfait aux hypothèses du théorème de point fixe et en déduire une suite récurrente convergeant vers l'unique solution $u_\star$ de $f(u)=u$ sur $[0,2]$.
4. En prenant 1 comme premier terme de la suite récurrente, donner une estimation de $u_\star$ à 10^{-5} près ainsi qu'une estimation du nombre de termes à calculer pour obtenir cette valeur approchée.

Exercice 2 - Méthode de Newton

On définit

$$\begin{array}{lllll} g & : &]-3,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & u & \mapsto & \ln(3+x)+\frac{1}{2}e^x \end{array}$$

1. Calculer g'.
2. Montrer que g admet une unique racine r.
3. On veut appliquer la méthode de Newton et on construit donc une suite récurrente
$$u_{n+1}=h(u_n).$$
Déterminer la fonction h.
4. Calculer g'' et g'''.
5. Calculer $g(-2)$ et $g''(-2)$.
6. Déduire des deux questions précédentes que g est concave en r.
7. Montrer que pour $u_0=-2.5$, la suite (u_n) donnée par la méthode de Newton de donnée initiale u_0 converge.
8. Montrer que $|g'(r)|\geq|g'(-2)|$, puis en appliquant le théorème des accroissements finis, que $|u_n-r|\leq\left|\frac{g(u_n)}{g'(-2)}\right|$. Déterminer à la calculatrice un indice k pour lequel $\left|\frac{g(u_k)}{g'(-2)}\right|<10^{-9}$, et donner une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

9. Que peut on dire du signe des termes de la suite $g(u_n)$? (À justifier)
10. Calculer $g(u_{k+1})$ en utilisant la calculatrice (où k est l'entier défini à la question 8). Comment peut on expliquer ce résultat ?

Exercice 3 - Séries numériques

On définit la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \sin\left(\frac{w_n}{2}\right)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leq w_{n+1} \leq \frac{w_n}{2} \leq 1$$
2. Montrer que la série
$$S = \sum_{k\geq 0} (-1)^k w_k$$
converge.
3. Pour N entier, donner une majoration du reste R_N de la série S en fonction de N. Donner une estimation de l'indice N à calculer pour que le calcul de la somme partielle donne une précision à 2^{-30} de la valeur de S.