MAT404 **Université Grenoble Alpes** **20 mai 2019**

Durée : 2 heures

Seule une feuille <u>manuscrite</u> recto-verso de format A4 est autorisée.
Le barème tiendra compte de la longueur de l'énoncé.

Formes quadratiques, Analyse de Fourier

Exercice 1 :

1. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

   (a) Soit M la matrice de ϕ dans une base B de $\mathbb{R}^2$. Sous quelle(s) condition(s) sur M la base B est elle ϕ-orthogonale ? ϕ-orthonormée ?

   (b) A quelles conditions sur la signature et sur le rang, la forme ϕ est elle un produit scalaire ?

   (c) Les matrices suivantes peuvent elles représenter ϕ dans des bases différentes de $\mathbb{R}^2$?
   $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, B_1 et B_2 deux bases de V. Soit $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

   (a) Soit u un vecteur de V. Soient U_1 et U_2 les vecteurs colonnes des coordonnées de u dans les bases B_1 et B_2.

      i. Donner le lien entre U_1, U_2 et P la matrice de passage de B_1 vers B_2.

      ii. On suppose $\dim V = 2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $U_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Trouver x_2 et y_2 en fonction de x_1 et y_1.

   (b) Soient M_1 et M_2 les matrices de ϕ dans les bases B_1 et B_2 respectivement.

      i. Donner le lien entre M_1, M_2 et P.

      ii. On suppose $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ et P comme dans 2.(a).ii. Trouver M_2.

      iii. En se basant sur la question précédente, ϕ est elle définie positive ? Donner une base ϕ-orthonormée sans calcul.

Exercice 2 :

Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont la forme quadratique associée, écrite dans la base canonique est $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - x_3^2$.

1. Donner M, la matrice de ϕ dans la base canonique.

2. Utiliser l'algorithme de Gauss pour réduire $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ à une combinaison linéaire de carrés. En déduire la signature de q. La forme ϕ est elle un produit scalaire ? Existe-t-il une base ϕ-orthonormée de $\mathbb{R}^3$?

3. En utilisant la question précédente, trouver une base B de $\mathbb{R}^3$ qui soit ϕ-orthogonale.

Tournez s.v.p.

<u>Exercice 3</u> :

1. Montrer que les séries $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}\right)$ sont convergentes.

2. (a) Calculer $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx$. On pourra utiliser la parité pour ramener l'intégrale sur $[0, \pi]$.

   (b) Par une intégration par partie, calculer $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx$ pour k entier, $k > 0$. On pourra utiliser la parité pour ramener l'intégrale sur $[0, \pi]$ et on distinguera les cas $k = 2n$ et $k = 2n+1$. On rappelle que $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

3. En déduire les coefficients de Fourier trigonométriques $a_0(f)$, $a_k(f)$ et $b_k(f)$ pour $k > 0$ de la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$.

4. Utiliser le théorème de Dirichlet et montrer que, pour tout $x \in \left]-\pi, \pi\right[$:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left((2n+1)\, x\right)$$

   (on énoncera et vérifiera toutes les hypothèses nécessaires).

5. A l'aide de l'identité de Parseval, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$

<u>Exercice 4</u> :

On rappelle que $\cos^2(u) = \frac{1+\cos(2u)}{2}$.

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = C^0\left([-\pi, \pi], \mathbb{R}\right)$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

et un sous espace W de V défini par $W = \text{Vect}\{1, \cos(x)\}$.

1. Montrer que $\{1, \cos(x)\}$ est une base orthogonale de W. Par une normalisation de chacun des vecteurs de cette base, en déduire une base orthonormée $\{e_1, e_2\}$ de W.

2. Rappeler la formule générale de la projection orthogonale d'un vecteur $f \in V$ sur W. (on utilisera la base $\{e_1, e_2\}$).

3. Si f est impaire, simplifier la formule obtenue en 2.

4. Calculer les projections orthogonales des fonctions $f(x) = 1 + \sin(x)$ et $g(x) = \cos^2(\frac{x}{2})$ sur W.

5. On note W' le sous espace vectoriel de V défini par $W' = \text{Vect}\{1 + \sin(x), 1 - \sin(x)\}$ et p_W la projection orthogonale de W' sur W. Trouver une base de $\text{Ker}(p_W)$.