Indications mai 2018

Ex 1)

1) a) $U_1 = P U_2$

b) $M_2 = {}^tP M_1 P$

c) $\text{rang}(M_2) = \text{rang}(M_1)$

2) Forme bilinéaire symétrique définie positive : $\phi(x,y) = \phi(y,x)$
$\phi(x,x) \geq 0$ et $\phi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$

3) a) $q(x) = \phi(x,x)$

b) $q(x+y) = \phi(x+y, x+y)$
car $= \phi(x,x) + 2\phi(x,y) + \phi(y,y)$
par bilinéarité et symétrie

c) ϕ orthogonale si M diagonale
ϕ orthonormée si M = identité

d) signature = (dimension, 0)
($\Rightarrow$ rang = dimension mais ce dernier critère ne suffit pas)

Ex 2)

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\phi(x,y) = {}^tX M Y = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 3 x_2 y_2$

2) $q = (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2$

signature $(1,1)$, n'est pas un produit scalaire, pas de base ϕ-orthonormale

3) Base ϕ-orthogonale

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base ϕ-ortho

4) En orthonormalisant $\mathcal{B}$, on tombe sur la base canonique (ou sur $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$), qui n'est pas ϕ-orthogonale

Ex 3)

1) a) Riemann

b) non, (Riemann $\sim \frac{1}{2e}$)

2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx)\, dx$$

$$= \left[-\frac{\cos(kx)}{k} x \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k}\, dx$$

$$= \frac{-2(-1)^k}{k}\pi + \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-2(-1)^k}{k}\pi$$

3) $f(x) = x$ est impaire donc $a_0, a_k = 0$ et

$$b_k = \frac{-2(-1)^k}{k}$$

4) x est C^1 par morceaux sur $[-\pi,\pi]$ et continue sur $]-\pi,\pi[$ donc Dirichlet s'applique

5) a) $\sin k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k=2\ell \\ (-1)^\ell & \text{si } k=2\ell+1 \end{cases}$

b) 4 en $x=\frac{\pi}{2}$ donne

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2\ell+2}}{2\ell+1} (-1)^\ell$$

(converge d'après Dirichlet)

et $\sum_{\ell\geq 0} \frac{(-1)^\ell}{2\ell+1} = \frac{\pi}{4}$

6) x est cont. par morceaux, Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1} b_k^2$$

donc

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{2}{k}\right)^2$$

$$\frac{\pi^2}{3} = 2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$$

et $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Ex 4)

1) car $1\times x$ est impaire et $[-1,1]$ symétrique par rapport à 0

$\langle 1,1\rangle = 2$

$\langle x,x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

Base orthonormée $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}x\right\}$

2) $pr(f) = \langle f_1, f\rangle f_1 + \langle f_2, f\rangle f_2$

3) Si f paire $\langle f_2, f\rangle = 0$ et

$$pr(f) = \langle f_1, f\rangle f_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

4) Si f impaire, $\langle f_1, f\rangle = 0$ et

$$pr(f) = \langle f_2, f\rangle f_2 = \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(t)\,t\,dt\right) x$$

5) $pr(x^2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$pr(x^3) = \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} t^4\,dt\right)x$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} x$$

$$= \frac{3}{5}x$$

$$pr(x^2+x^3) = pr(x^2) + pr(x^3)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{5}x$$