Examen du vendredi 21 juin.
Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso.
Calculatrices, téléphones portables, ordinateurs interdits. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. A quelles conditions dit-on que φ est un produit scalaire sur V ?
2. On suppose que φ est un produit scalaire. Rappeler la définition de la *norme* sur V induite par φ, et de la *distance* induite par φ entre deux vecteurs $v, w \in V$.

Exercice 2

On considère la fonction $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ par $q(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = 4x^2 + 2\sqrt{6}xy - y^2$.

1. Montrer que q est une forme quadratique.
2. Dans la suite de cet exercice, on note φ la forme polaire de q. Donner une formule pour $\varphi(v, w)$ pour deux vecteurs quelconques $v, w \in \mathbb{R}^2$.
3. Donner la matrice M de φ dans la base canonique B_1 de $\mathbb{R}^2$.
4. La forme φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?
5. Existe-t-il un vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq v \in \mathbb{R}^2$ tel que $q(v) = 0$? Si oui, donnez-en un.
6. Calculer les valeurs propres de M, et déterminer une base B_2 de $\mathbb{R}^2$ qui est à la fois orthonormée pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ et q-orthogonale.
7. Rappeler la définition d'une matrice orthogonale, et vérifier que la matrice de passage de B_1 vers B_2 est orthogonale.

Exercice 3

Dans cet exercice, on admettra que pour n entier non nul, on a :

$$\int_0^\pi x^3 \sin(nx)\, dx = -\pi(n^2\pi^2 - 6)\frac{(-1)^n}{n^3}$$

Soit $S(f)$ la série de Fourier de la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(t) = t^3$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f
2. Montrer que $S(f)(t) = f(t)$ pour $t \in]-\pi, \pi[$ en appliquant le théorème de Dirichlet (on justifiera que les hypothèses sont vérifiées).
3. La formule pour $S(f)(t)$ de la question précédente est-elle valable pour $t = \pi$? Sinon, que vaut $S(f)(\pi)$?
4. Déterminer la valeur de la série de Fourier au point $t = \pi/2$. En déduire une série convergente dont la somme vaut $\pi^3/8$.
5. Montrer que l'identité de Parseval s'applique. En déduire une formule pour :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2\pi^2 - 6)^2}{n^6}$$

6. Les séries suivantes sont-elles convergentes : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$?
7. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$, sachant que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 4

1. Soit φ une forme bilinéaire symétrique et q la forme quadratique associée. Rappeler la formule de polarisation exprimant $\varphi(u,v)$ en fonction de la valeur de q en $u, v, u+v$.
2. Soit le produit scalaire défini sur l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$$
On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Exprimer la valeur de $\|f\|^2$ à l'aide d'une intégrale.
3. Déterminer $\|f\|^2, \|g\|^2, \|h\|^2$ pour les fonctions définies sur $[-1,1]$ par
$$f(t) = 1+\sqrt{3}t, \quad g(t) = 1-\sqrt{3}t, \quad h = f+g = 2$$
4. Vérifier que $\|h\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$. En déduire $\langle f,g\rangle$.
5. Orthonormaliser la famille $\{f,g\}$ par le procédé de Gram-Schmidt.