Contrôle continu 3, MAT404
Date : mardi 16 avril 2019, de 9h50 à 10h50

Documents autorisés : une page nominative recto-verso manuscrite de notes. Tous les autres documents, ainsi que les calculatrices, sont interdits.

Exercice 1 *Considérons* $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
La forme quadratique q *de matrice* M *est-elle un produit scalaire ? Si oui, donner une base* q*-orthonormale.*

Exercice 2 *Considérons l'ensemble* E *des fonctions continues de* $[-\pi, \pi]$ *à valeurs réelles. C'est un espace vectoriel, et on le munit du produit scalaire suivant :*

$$< f,\ g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

1. *Donner une expression de* $\cos(a+b)$ *et* $\sin(a+b)$ *en fonction de* $\cos(a)$, $\sin(a)$, $\cos(b)$ *et* $\sin(b)$, *où* a *et* b *désignent deux réels quelconques.*
2. *Montrer que les fonctions* $t \to \cos(t)$ *et* $t \to \cos(2t)$ *sont orthogonales. On admettra dans la suite que la famille* $\mathbb{F} = \{t \to 1,\ t \to \cos(t),\ t \to \sin(t),\ t \to \cos(2t),\ t \to \sin(2t)\}$ *est orthogonale.*

Considérons maintenant la fonction $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *définie par* $h(t) = |\sin(t)|$.

3 *Déterminer le signe de* $\sin(t)$ *sur* $[-\pi, \pi]$ *et en déduire que pour toute fonction* $g \in E$, *on a :*

$$< h,\ g >= -\int_{-\pi}^{0} \sin(t)g(t)dt + \int_{0}^{\pi} \sin(t)g(t)dt$$

4 *Déterminer la projection orthogonale de* h *sur l'espace vectoriel engendré par* $\mathbb{F}$.