Université Grenoble Alpes
Année académique 2018-19

MAT 404

Contrôle continu n° 1
jeudi 14 février

Téléphones et documents interdits. Durée 1h. Toute réponse doit être justifiée.

Séries numériques

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de la série $(\sum_{n\geq 1} u_n)$.
$(a)\ u_n = \dfrac{1}{n^2+e^{-n}}$; $\quad (b)\ u_n = \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{1}{n^4}$; $\quad (c)\ u_n = \ln(1+\dfrac{1}{n}) - \sin\dfrac{1}{n}$; $\quad (d)\ u_n = \ln(\cos\dfrac{1}{n})$.

Algèbre linéaire

Exercice 2. Montrer que $B = (\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et donner les coordonnées de $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ dans cette base, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ quelconques. La matrice $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\1 & 0 & -1\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ est-elle inversible? Si oui, donner son inverse.

Exercice 3. Soit $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions f infiniment dérivables, définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note

$$W = \{f \in V \mid f''(t) = 3f(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

(1) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de V. Quelle est sa dimension?
(2) Donner une base de W.
(3) L'application $\Phi : W \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(f) = (f(0), f'(0))$ est-elle linéaire? Si oui, décrire son noyau et son image.