MAT244 : contrôle continu du 18 mars 2014, proposition de corrigé.

Exercice 1.
Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

1. Montrons que Φ est une forme bilinéaire symétrique.
Soit $(x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3'), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$\Phi\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) =$
$= 3(\lambda x_1 + x_1')y_1 + (\lambda x_1 + x_1')y_2 + (\lambda x_2 + x_2')y_1 + 3(\lambda x_2 + x_2')y_2 + 2(\lambda x_3 + x_3')y_3$
$= \lambda(3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3) + 3x_1'y_1 + x_1'y_2 + x_2'y_1 + 3x_2'y_2 + 2x_3'y_3$
$= \lambda\Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) + \Phi\left(\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right)$, donc Φ est linéaire à gauche. De plus,
$$\Phi\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right),$$
donc Φ est symétrique, et bilinéaire.
2. La matrice M de Φ dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par $M_{i,j} = \Phi(e_i, e_j)$, et se lit sur la formule définissant Φ :
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
3. Soit $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$, on considère $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, et on montre que le système linéaire
$$X_1\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + X_2\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + X_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
a une unique solution (X_1, X_2, X_3) dans $\mathbb{R}^3$. Soustraire la première ligne du système à la deuxième le rend triangulaire, et on trouve
$$(X_1, X_2, X_3) = (x_1 + x_2, -x_1 + x_2, x_3).$$
4. Ainsi, lorsque v est un vecteur dans $\mathbb{R}^3$, et qu'on note (x_1, x_2, x_3) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_0$, la formule précédente exprime ses coordonnées (X_1, X_2, X_3) dans la base $\mathcal{B}_1$ en fonction de x_1, x_2 et x_3. En considérant que cette formule est un système linéaire d'inconnue (x_1, x_2, x_3), on obtient après résolution de ce système :
$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}(X_1 - X_2), \frac{1}{2}(X_1 + X_2), X_3\right).$$

5. Si q est la forme quadratique associée à Φ alors, avec les notations de la question précédente, pour tout v dans $\mathbb{R}^3$,

   $$q(v) = 3x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2+2x_3^2 = \frac{3}{4}(X_1-X_2)^2+\frac{1}{2}(X_1^2-X_2^2)+\frac{3}{4}(X_1+X_2)^2+2X_3^2 = 2X_1^2+X_2^2+2X_3^2.$$

   On lit sur cette expression que la matrice N de Φ dans la base $\mathcal{B}_1$ s'écrit

   $$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. La matrice de passage P de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}_1$ a ses colonnes formées des coordonnées dans $\mathcal{B}_0$ des vecteurs constituant $\mathcal{B}_1$, soit

   $$P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. La formule de changement de base qui relie M, N et P est $N = P^tMP$ (et sa vérification pour les matrices calculées ci-dessus est laissée aux lecteurs(trices).
8. Le rang de Φ est celui de sa matrice dans n'importe quelle base, donc 3, au vu de N.
9. Étant donnés deux vecteurs v et w dans $\mathbb{R}^3$, de coordonnées respectives (X_1, X_2, X_3) et (Y_1, Y_2, Y_3) dans la base $\mathcal{B}_1$, on a $\Phi(v, w) = 2X_1Y_1 + X_2Y_2 + 2X_3Y_3$. Il suffit donc de choisir $(X_1, X_2, X_3) = (1, 0, 0)$ et $(Y_1, Y_2, Y_3)) = (0, 0, 1)$ pour avoir $\Phi(v, w) = 0$.
10. Par contre, si x est un vecteur non nul dans $\mathbb{R}^3$, de coordonnées (X_1, X_2, X_3) dans la base $\mathcal{B}_1$, on a $(X_1, X_2, X_3) \neq (0, 0, 0)$, et $\Phi(v, w) = 2X_1^2 + X_2^2 + 2X_3^2 \neq 0$. Il n'existe donc pas de vecteur x non nul dans $\mathbb{R}^3$ tel que $\Phi(x, x) = 0$.

Exercice 2.

Soit $V = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère sur V la forme bilinéaire symétrique définie par

$$\Phi(P, Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

1. La forme bilinéaire symétrique Φ vérifie, pour tout $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$,

   $$\Phi(P, P) = P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2 \geq 0,$$

   et même (puisque $P' = 2aX + b$ et $P'' = 2a$),

   $$\Phi(P, P) = c^2 + b^2 + 4a^2,$$

   donc $\Phi(P, P) = 0$ implique $a = b = c = 0$, soit $P = 0$. Ainsi, Φ est définie positive (ou positive et non dégénérée), donc c'est un produit scalaire.
2. Par contre, $\Phi(X^3, X^3) = 0$, donc Φ n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Pour tous réels $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, on a

   $$\Phi(c + bX + aX^2, \gamma + \beta X + \alpha X^2) = c\gamma + b\beta + 4a\alpha,$$

   donc la matrice de Φ dans la base $(1, X, X^2)$ de V est

   $$\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Soit $W = \{P \in V \mid P(1) = 0\}$. Il est clair que le polynôme nul appartient à W. De plus, si $P, Q \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0$, donc $\lambda P + Q \in W$. Ainsi, W est un sous-espace vectoriel de V.

   Enfin, si $P = aX^2 + bX + c \in V$, P appartient à W si et seulement si $a + b + c = 0$. Cette relation est donc une équation définissant W, qui est par conséquent un plan (de dimension 2) dans V (de dimension 3). Une base en est par exemple (en prenant dans l'équation définissant W soit $(a, b) = (0, 1)$ soit $(a, b) = (1, 0)$) le couple $(X - 1, X^2 - 1)$.

5. Lorsque $a, b, c \in \mathbb{R}$, le polynôme $aX^2 + bX + c$ appartient à $W^\perp$ si et seulement si il est orthogonal (pour Φ) aux deux constituant une base quelconque de W. En utilisant la base ci-dessus, on trouve

$$W^\perp = \{aX^2 + bX + c \in V \mid b - c = 4a - c = 0\}.$$

   Cette fois, l'analyse dimensionnelle indique que $W^\perp$ est une droite, et elle est engendrée (on prend $c = 4$) par $X^2 + 4X + 4$.

6. On pose $P_1(X) = X - 1$ et $P_2(X) = X^2 - X$.

   (a) Remarquons tout d'abord que $P_1 \in W$, $P_2 \in W$, et la famille (P_1, P_2) est libre, car échelonnée en degré. C'est donc une base de W, de même que $(P_1, P_2 + \lambda P_1)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $(P_1, P_2 + \lambda P_1)$ soit une base Φ-orthogonale de W est donc $\Phi(P_1, P_2 + \lambda P_1) = 0$, soit $-1 + 2\lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 1/2$.

   (b) Construisons une base Φ-orthonormée de W. D'après la question précédente, $(P1, P_2 + \frac{1}{2}P_1)$ est une base Φ-orthogonale de W. Il suffit donc de normer chaque polynôme. Or, $\Phi(P_1, P_1) = 2$ et $\Phi(P_2 + \frac{1}{2}P_1, P_2 + \frac{1}{2}P_1) = 9/2$. Donc une base Φ-orthonormée de W est $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{3}\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right)\right)$.

   (c) Pour compléter la famille précédente en une base orthonormée de V, on lui adjoint un élément de $W^\perp$ de norme 1. Comme $X^2 + 4X + 4$ est un élément de $W^\perp$, de norme 6, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{3}\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right), \frac{1}{6}X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{2}{3}\right)$ est une base Φ-orthonormée de V.