Exercice 1.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ différent de 1. Démontrer par récurrence sur k la formule : $1+\lambda+\ldots+\lambda^k = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$.

Exercice 2. $\diamond$ Déterminer si les séries suivantes convergent ou non (utiliser une comparaison).

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^{-1/2}}{2^n}$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!}$

Exercice 3. $\diamond$ Pour chaque série ci-dessous, déterminer si elle converge.

1. $(\sum_{n\geq 1} e^{\frac{1}{n^2}} - \cos(\frac{1}{n}))$
2. $(\sum_{n\geq 1} n^{\frac{3}{2}}(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1))$
3. $(\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n})})$
4. $(\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n^\alpha} - \sqrt{(n-1)^\alpha}))$ (selon les valeurs de α).
5. $(\sum_{n\geq 1} \sin(\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n}))$
6. $(\sum_{n\geq 1} \log(1+\frac{1}{n}) - \log(1-\frac{1}{n}))$
7. $(\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1})$
8. $(\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n+1}})$
9. $(\sum_{n\geq 1} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right))$
10. $(\sum_{n\geq 1} \frac{1-n\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n+1}})$

Exercice 4.
On considère dans cet exercice des séries de la forme $(\sum_{n\geq 1} n^\alpha \lambda^n)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| < 1$.

1. En utilisant une comparaison, montrer que si $\alpha \leq 0$ alors cette série converge.
2. Quelle est la limite quand $n \to \infty$ de $n^\alpha \lambda^{n/2}$?
3. Justifier l'existence d'une constante C telle que $n^\alpha \lambda^n \leq C\lambda^{n/2}$ pour tout n. En déduire que pour tout α et tout λ tel que $|\lambda| < 1$ la série $(\sum_{n\geq 1} n^\alpha \lambda^n)$ converge.
4. En déduire que pour tout polynôme P et tout λ tel que $|\lambda| < 1$ la série $(\sum_{n\geq 1} P(n)\lambda^n)$ converge.

Exercice 5.
On considère dans cet exercice des séries de la forme $(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta})$ avec α, β des nombre réels strictement positifs.

1. Par comparaison avec $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, montrer que cette série converge lorsque $\alpha > 1$.
2. On suppose maintenant $\alpha < 1$. Quelle est la limite quand $n \to \infty$ de $n^{\alpha-1}\log(n)^\beta$?
3. En supposant toujours que $\alpha < 1$, démontrer l'existence d'une constante C telle que pour tout n $\frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta} \geq \frac{C}{n}$.

   En déduire que dans ce cas la série $(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta})$ diverge quelque soit β.