

**Exercice 1.**  $\diamond$  Pour chaque matrice  $A$ , donner la forme bilinéaire symétrique  $\phi$  dont  $A$  est la matrice dans la base canonique. Trouver une base orthogonale pour  $\phi$ . Existe-t-il une base  $\phi$ -orthonormée ? La forme  $\phi$  est-il un produit scalaire ?

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad 3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** Les formes suivantes sont-elles des produits scalaires ?

1.  $\diamond$  Sur  $\mathbb{R}[x]$ ,  $(P, Q) \mapsto \int_0^1 e^x P(x) Q(x) dx$ .
2.  $\diamond$  Sur  $\mathbb{R}^3$ , la forme polaire de la forme quadratique  $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ .
3.  $\diamond$  Sur  $\mathbb{R}^3$ , la forme polaire de la forme quadratique  $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$ .
4. (\*) Sur  $M_2(\mathbb{R})$ ,  $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$ .
5. (\*) Sur  $M_2(\mathbb{R})$ ,  $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$ .

**Exercice 3.** Démontrer les relations suivantes dans un espace vectoriel euclidien :

1.  $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4x \cdot y$ .
2.  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ .

**Exercice 4.**  $\diamond$  Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour orthonormaliser dans  $\mathbb{R}^3$  avec son produit scalaire usuel la base  $(e_1, e_2, e_3)$ , où  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 5.** Pour chaque espace euclidien  $E$  ci-dessous muni du produit scalaire  $\phi$ , appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la famille  $\mathcal{F}$  afin de produire une base orthonormée pour  $\langle \mathcal{F} \rangle$ . Calculer la projection orthogonale de  $v \in E$  sur  $\langle \mathcal{F} \rangle$ . Donner des équations définissant  $\langle \mathcal{F} \rangle$ .

1.  $\diamond$   $E = \mathbb{R}^3$ ,  $\phi$  le produit scalaire canonique,  $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
2.  $\diamond$   $E = \mathbb{R}^4$ ,  $\phi$  le produit scalaire canonique,  $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
3.  $\diamond$   $E = \mathbb{R}_3[X]$ ,  $\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(X) Q(X) dX$ ,  $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$ ,  $v = X^3$ .
4.  $\diamond$   $E = \mathbb{R}_3[X]$ ,  $\phi(P, Q) = \int_0^1 P(X) Q(X) dX$ ,  $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$ ,  $v = X^3$ .
5. (\*)  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $\phi(x, y) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3$ ,  $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ,  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 6.**  $\diamond$  Considérons dans  $\mathbb{R}^2$  la forme quadratique  $q(x, y) = 4x^2 + xy + y^2$ .

1. Démontrer que  $q$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$ .

- Donner une base orthogonale de  $\mathbb{R}^2$  pour ce produit scalaire. On pourra utiliser deux méthodes pour y parvenir : soit appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, soit utiliser la réduction de Gauss de  $q$ .

**Exercice 7.** Considérons sur  $\mathbb{R}^3$ , la forme quadratique  $q$ , définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 5y^2 - 2yz + 4z^2.$$

- Démontrer que la forme bilinéaire associée à  $q$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$ .
- Orthonormaliser, par le procédé de Gram-Schmidt, la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  pour obtenir une base de  $\mathbb{R}^3$   $q$ -orthonormale.

**Exercice 8.**  $\diamond$  Nous considérons l'espace  $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  des fonctions continues sur  $[-\pi, \pi]$ , à valeurs réelles. Nous munissons cet espace du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

- Montrer que si  $m$  et  $n$  sont des entiers distincts alors les fonctions  $x \mapsto \cos(nx)$ ,  $x \mapsto \cos(mx)$ ,  $x \mapsto \sin(nx)$  et  $x \mapsto \sin(mx)$  sont deux à deux orthogonales pour ce produit scalaire.
- Calculer  $\|x \mapsto \cos(nx)\|$  et  $\|x \mapsto \sin(nx)\|$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .
- Calculer la projection orthogonale de la fonction  $x \mapsto x$  sur le sous-espace de  $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  engendré par les fonctions  $1, \cos, \sin, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x)$ .

**Exercice 9.** Nous considérons l'espace  $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  des fonctions continues sur  $[-1, 1]$ , à valeurs réelles. Nous munissons cet espace du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

- Utiliser la méthode de Gram-Schmidt afin de produire une base orthonormée pour le sous-espace  $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ .
- Calculer la meilleure approximation polynomiale (au sens de la distance associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) de degré inférieur ou égal à 2 des fonctions suivantes :  $\exp, \cos$  et  $x \mapsto \sqrt{x+1}$ .

**Exercice 10.** (\*) Soit  $P$  une matrice carrée inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- Démontrer que la matrice  ${}^tPP$  est symétrique.
- Préciser, dans la base canonique  $(e_i)_{i=1, \dots, n}$  de  $\mathbb{R}^n$ , la matrice de la forme quadratique associée au produit scalaire usuel (canonique). Que peut-on dire de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  pour cette forme quadratique ?
- Soit  $q$  la forme quadratique définie, dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , par la matrice  ${}^tPP$ .
  - Pour tout vecteur colonne  $X$ , dont les coordonnées sont exprimées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , exprimer matriciellement la valeur  $q(X)$ .
  - Démontrer que  $q$  est une forme quadratique définie positive.
  - En déduire, en fonction de  $P$  et des vecteurs  $e_1, \dots, e_n$ , une base  $q$ -orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 11.** (\*) Soit  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et soit  $W \subset V$  un sous-espace de dimension finie. Soit  $p_W$  la projection orthogonale sur  $W$ . Montrer que

1.  $p_W(v) = v$  si et seulement si  $v \in W$
2.  $p_W \circ p_W = p_W$
3.  $p_W(v) = 0$  si et seulement si  $v \in W^\perp$ .

**Exercice 12.** (juin 22)

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[-1, 1]$  à valeurs réelles muni du produit scalaire

$$\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

On notera  $e_1 \in E$  la fonction constante égale à 1 sur  $[-1, 1]$ ,  $e_2 \in E$  la fonction définie par  $e_2(t) = t$ ,  $e_3 \in E$  la fonction définie par  $e_3(t) = \cos(t)$ . Vous pouvez utiliser 1,  $t$  et  $\cos(t)$  pour désigner  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  (abus de notation).

1. Vérifier que  $e_1 \perp e_2$ , déterminer la norme de  $e_1$  et  $e_2$
2. Déterminer la projection orthogonale de  $e_3$  sur l'espace vectoriel  $F$  engendré par  $e_1$  et  $e_2$
3. Quelle est la distance de  $e_3$  à  $F$  ?
4. Soit  $G$  l'espace vectoriel engendré par  $e_1, e_2, e_3$ . Quelle est la dimension de  $G$  ?
5. Déterminer une base orthonormale de  $G$ .

**Exercice 13.** Utiliser la méthode de la projection orthogonale pour trouver les nombres  $a$  et  $b$  tels que  $y = ax + b$  soit la meilleure droite d'approximation des points :

1.  $(x = 1, y = 1), (x = 2, y = 3), (x = 3, y = 2)$ .
2.  $(x = 1, y = 0), (x = 2, y = 5), (x = 3, y = 7)$ .

**Exercice 14.** Utiliser la méthode de la projection orthogonale pour trouver la fonction  $x \mapsto g(x) = a + b \cos(x) + c \cos(2x)$  qui minimise la distance  $d(g, x \mapsto x^2)$  dans l'espace  $C^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire  $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)f_2(t)dt$ .

**Exercice 15.** (\*)

1. Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  un famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $P = (v_1|v_2|\dots|v_n)$  la matrice dont les vecteurs colonnes sont les  $v_i$ . Montrer que  $({}^tPP)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ , où  $\langle -, - \rangle$  est le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Soit  $E$  un espace euclidien et soit  $B_1$  une base orthonormée pour  $E$ . Soit  $B_2$  une autre base pour  $E$ . Montrer que  $B_2$  est orthonormée si et seulement si la matrice  $P$  de changement de la base  $B_1$  à  $B_2$  est une matrice orthogonale.

**Exercice 16.** (\*) Soit  $f$  une endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  muni du produit scalaire  $\langle -, - \rangle$ .

1. Montrer que l'application  $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $\phi(v, w) = \langle v, f(w) \rangle$  est bilinéaire.
2. Soit  $B$  une base de  $E$ . Soit  $M$  la matrice de l'application linéaire  $f$  dans la base  $B$ . Soit  $N$  la matrice de l'application bilinéaire  $\phi$  dans la base  $B$ . Montrer que si  $B$  est une base orthonormée alors  $M = N$ .
3. Montrer que réciproquement si  $B$  n'est pas orthonormée alors  $M \neq N$ .

**Exercice 17.** Montrer que le produit de deux réflexions dans  $\mathbb{R}^2$  est une rotation dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 18.**  $\diamond$  Pour chaque matrice symétrique  $3 \times 3$ , trouver une base  $B_1$  de  $\mathbb{R}^3$ , composée de vecteurs propres de  $A_i$ , qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 19.**  $\diamond$  Pour chaque forme quadratique  $q$ , trouver une base de  $\mathbb{R}^3$  qui est  $q$ -orthogonale et orthonormée pour le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^3$ .

1.  $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$

2.  $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2\sqrt{2}xz + 4\sqrt{2}yz.$

**Exercice 20.** (mai 22)

Soit  $\phi$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même de matrice dans la base canonique

$$A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Vérifier que 1 et -1 sont valeurs propres de  $A$
2. Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de  $\phi$
3. *Bonus* : Montrer que  $\phi$  est une symétrie orthogonale par rapport à un plan que l'on déterminera.