

Exercice 1. (+) Les fonctions suivantes sont-elles des formes bilinéaires ? Sont elles symétriques ?

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1 y_2 + x_2 y_1.$

2. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(P, Q) = 2P'(1)P(0) + Q'(1)Q(0)$ puis $\phi(P, Q) = 2P'(1)Q(0) + Q'(1)P(0).$

3. $\phi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(1-x)dx.$

Exercice 2. (+) Pour chacune des formes bilinéaires suivantes, calculer sa matrice M_1 dans la base \mathcal{B}_1 et sa matrice M_2 dans la base \mathcal{B}_2 . Calculer P , la matrice de passage de \mathcal{B}_1 vers \mathcal{B}_2 , et vérifier que $M_2 = {}^t P M_1 P$. La forme bilinéaire ϕ est-elle symétrique?

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= x_1 y_2 + 3y_1 x_2 & \mathcal{B}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}. \\ \phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R} & \phi(P, Q) &= P(1)Q(-1) & \mathcal{B}_1 &= \{1, X, X^2\}, \mathcal{B}_2 = \{1, (X-1), (X^2-3X+2)\} \\ \phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R} & \phi(P, Q) &= \int_0^1 P(x)Q(1-x)dx & \mathcal{B}_1 &= \{1, X, X^2\}, \mathcal{B}_2 = \{1, (X-1), X^2-X\}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. Soit Ψ une forme bilinéaire définie sur $V \times V$ où V est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Soit \mathcal{B} une base de V et A la matrice de Ψ dans cette base. Montrer que l'application

$$\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \Phi(u, v) = \Psi(v, u)$$

est une forme bilinéaire, calculer sa matrice dans la base \mathcal{B} en fonction de A . Montrer que Ψ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si A l'est.

2. Démontrer que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme somme de la matrice symétrique $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et de la matrice antisymétrique $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Démontrer que c'est l'unique façon d'écrire M comme une somme d'une matrice symétrique et une matrice anti-symétrique.
3. Montrer que toute forme bilinéaire $\Delta : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme de deux formes bilinéaires, l'une symétrique, l'autre antisymétrique, que l'on précisera.

Exercice 4. (*) Pour chaque forme bilinéaire ϕ , sur l'espace vectoriel V donner son rang (sauf pour le 4) et calculer son noyau. Trouver l'orthogonal pour ϕ du sous-espace W (sauf pour le 4).

$$1. V = \mathbb{R}^3, \phi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

$$2. V = \mathbb{R}^3, \phi : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = x_1y_1 + 2x_2y_2, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$3. V = \mathbb{R}^3, \phi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$4. V = C^0([0, 1], \mathbb{R}), \phi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Exercice 5. Soient A et B des matrices $n \times n$. Montrer l'implication suivante :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, {}^tXAY = {}^tXBY \Rightarrow A = B.$$

Exercice 6. Soit V un espace vectoriel, et ϕ une forme bilinéaire symétrique définie sur V .

1. Vérifier que si q_ϕ est la forme quadratique associée à la forme ϕ alors on a la relation $\phi(x, y) = \frac{1}{4}(q_\phi(x + y) - q_\phi(x - y))$
2. En déduire que si $q_\phi(u) = q_\phi(v)$, alors $(u + v)$ et $(u - v)$ sont orthogonaux pour la forme bilinéaire ϕ .
3. Interpréter ce résultat quand $V = \mathbb{R}^3$ et ϕ est le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^3 .

Exercice 7. Vérifier que si V est un espace vectoriel et q_ϕ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique ϕ sur $V \times V$ alors on a les relations

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q_\phi(x + y) - q_\phi(x) - q_\phi(y)), \quad q_\phi(x) + q_\phi(y) = \frac{1}{2}(q_\phi(x + y) + q_\phi(x - y)).$$

Exercice 8. (+) Pour chaque forme quadratique q sur \mathbb{R}^3 , donner la forme polaire ϕ associée et la matrice de ϕ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

2. $q(x, y, z) = 2xy + 4xz + 6yz$

3. $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz$

4. $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4yz$

Exercice 9. (*) (version simplifiée de la forme de Minkowski). Sur \mathbb{R}^2 , on considère la forme bilinéaire

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1x_2 - y_1y_2.$$

1. Donner la matrice N de φ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .
2. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ une matrice telle que $\varphi(P\underline{V}, P\underline{W}) = \varphi(\underline{V}, \underline{W})$ pour tous $\underline{V}, \underline{W}$ dans \mathbb{R}^2 . On suppose pour simplifier que $a, e > 0$.
Montrer que $\varphi(P\underline{V}, P\underline{W}) = \varphi(\underline{V}, \underline{W})$ pour tout $\underline{V}, \underline{W}$ si et seulement si $a^2 - d^2 = 1$, $b^2 - e^2 = -1$ et $ab = de$.
3. En déduire que $a = e$. On pose $\beta = \sqrt{a^2 - 1}$, montrer que $b = d = \pm\beta$.
4. Ecrire P en fonction de b . Que constate-t-on ? (On pourra faire une substitution $b = \sinh(\alpha)$.)

Exercice 10. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ${}^tXMX > 0$.
- (ii) $a > 0$ et $ad - b^2 > 0$.

Exercice 11. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une base de \mathbb{R}^2 qui est orthogonale pour la forme bilinéaire donnée par la matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .
2. En déduire une base orthonormée pour cette même forme.
3. Quel est le rang de A ?

Exercice 12. (*) Soit V l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 .

1. Soit ϕ la forme bilinéaire définie, pour tout $(A, B) \in V \times V$, par $\phi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB)$.

(a) Déterminer sa matrice par rapport à la base canonique de V .

(b) Démontrer qu'elle est symétrique et donner son rang.

(c) Trouver une base ϕ -orthonormale pour $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit D la forme quadratique définie, pour tout $A \in V$, par $D(A) = \text{Det}(A)$.
- (a) Calculer la forme bilinéaire symétrique associée à D .
 - (b) Donner son rang et sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13. (*) Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère la forme $\tau(A, B) = \text{Tr}(AB)$ où Tr est la trace d'une matrice.

1. Montrer que τ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer que pour toute matrice carrée $A \neq 0$ il existe B telle que $\tau(A, B) \neq 0$. (On pourra calculer $\tau({}^tAA)$).

Exercice 14. (+) Pour chaque forme quadratique q

- Appliquer la réduction de Gauss à q pour l'écrire comme combinaison linéaires de carrés de formes linéaires indépendantes.
- Déduire la signature et le rang de q . Donner une base q -orthogonale pour \mathbb{R}^n . Si possible, donner une base q -orthonormée de \mathbb{R}^n .
- La forme bilinéaire associée à q est elle un produit scalaire?

1. $q(x, y) = x^2 + xy + 3y^2$,

2. $q(x, y) = x^2 - 5xy - y^2$,

3. $q(x, y) = xy,$

4. $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz,$

5. $q(x, y, z) = xy - yz,$

6. $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz.$

Exercice 15. (+) Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, on considère sur $\mathbb{R}_2[X]$ la forme quadratique qui à un polynôme associe son discriminant :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P(X) = aX^2 + bX + c & \mapsto & \Delta(P) = b^2 - 4ac \end{array}$$

1. Donner la forme bilinéaire symétrique φ associée à Δ .
2. Donner la matrice de la forme polaire φ dans la base $\mathcal{F}_0 = \{1, X, X^2\}$.

3. Montrer que pour tout polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire : $\Delta(P) = b^2 + (a - c)^2 - (a + c)^2$.
4. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{F}_1 = (\frac{1}{2}(X^2 - 1), X, \frac{1}{2}(X^2 + 1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Donner la matrice de passage de la base \mathcal{F}_0 à la base \mathcal{F}_1 . Donner la matrice de la forme φ dans la base \mathcal{F}_1 .
6. Exprimer $\Delta(P)$ en fonction des coordonnées de P dans la base \mathcal{F}_1 . Donner le rang et la signature de φ .