

**Exercice 1.**  $\diamond$  Pour chaque espace vectoriel  $V$ , dire si oui ou non la famille  $F$  d'éléments de  $V$  est une base de  $V$ .

$$(1)V = \mathbb{R}^3, F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2)V = \mathbb{R}^3, F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(3)V \subset \mathbb{C}^3, V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\}, \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(4)V = \mathbb{R}_2[X], \quad F = \{X^2 - 3X + 1, X^2 + 3X - 4, 2X^2 - 3\}.$$

$$(5)V = \mathbb{R}_2[X], \quad F = \{(X - 1)^2, (X - 1), 1\}.$$

Lorsque  $F$  est bien une base, donner les coordonnées du vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  (pour 1, 2 et 3) ou du polynôme  $a + bX + cX^2$  (pour 4 et 5) par rapport à  $F$ .

**Exercice 2.**  $\diamond$  Pour chaque espace vectoriel  $V$ , dire si oui ou non la partie  $W \subset V$  est un sous-espace vectoriel.

$$1. V = \mathbb{R}^3, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\}.$$

$$2. V = \mathbb{C}^3, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y - iz = 2 + 3i \right\}.$$

$$3. V = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), W = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid f'' + f' = 0\}.$$

$$4. V = \mathbb{R}_3[X], W = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid (P(3))^2 = P(2)\}.$$

Lorsque  $W$  est bien un sous-espace vectoriel, donner une base de  $W$  et calculer les coordonnées d'un élément arbitraire de  $W$  dans cette base.

**Exercice 3.**  $\diamond$  Pour quelles valeurs de  $k$  le système

$$\begin{cases} kx + (1 + i)y = 1 \\ (1 + i)x + ky = 1 \end{cases}$$

admet-il a) aucune solution ?

b) une solution unique ?

c) une infinité de solutions ?

**Exercice 4.**  $\diamond$  Calculer le noyau et l'image de chaque matrice.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.**  $\diamond$  Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6.** Démontrer que les équations de la chaleur et des ondes sont bien des équations linéaires.

**Exercice 7.** Soit  $f : V \rightarrow V'$  une application linéaire entre deux espaces vectoriel. Démontrer que  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont des sous-espaces vectoriels de  $V$  et  $V'$ .

**Exercice 8.**  $\diamond$  Pour chaque application, indiquer si oui ou non elle est linéaire. Si oui, en donner le noyau et l'image.

1. L'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  donnée par  $f \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y \\ y - z \\ z + 1 \end{pmatrix}$ .
2. L'application de  $\mathbb{C}^3$  dans  $\mathbb{C}^3$  donnée par  $f \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} ix - iy \\ -iy - z \\ ix + z \end{pmatrix}$ .
3. La fonction  $\phi$  qui envoie  $C^\infty([0, 1], \mathbb{C})$  sur lui-même donnée par

$$\phi(f) = f' - 2f$$

Nous rappelons que  $C^\infty([0, 1], \mathbb{C})$  est l'espace de fonctions sur l'intervalle  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  qui sont dérivables à tous ordres.

4. La fonction  $\phi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$  donnée par  $\phi(P) = P' - XP$ .
5. La fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  donnée par projection sur l'axe des  $x$ .
6. La fonction de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  donnée par rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'origine.

**Exercice 9.** Montrer que les trois fonctions suivantes forment une famille liée dans l'espace  $C^0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  :

$$x \mapsto e^{ix}, \quad x \mapsto \sin(x), \quad x \mapsto e^{-ix}.$$

Donner la dimension de  $\text{Vect}(e^{ix}, \sin(x), e^{-ix})$ .

**Exercice 10.** \* Soit  $n$  réels distincts  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Montrer que la famille de fonctions  $(e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x})$  est libre dans l'espace vectoriel  $C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ .

**Exercice 11.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P_0, \dots, P_n$  des polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  tels que pour chaque  $i$ , le degré de  $P_i$  soit  $i$ . Montrer que la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

**Exercice 12.** On se place dans le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}_3[X]$  des fonctions polynômes de degré au plus 3.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 1 est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}_3[X]$ . Prouver que ce dernier est de dimension 3 et en préciser une base.
2. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_3[X]$ ? Qu'en est-il de l'ensemble des polynômes de degré égal à 2?

**Exercice 13.**  $\diamond$

1. On considère l'équation différentielle  $\theta'' + \omega^2\theta = 0$ . Montrer que l'ensemble des fonctions du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  solutions de cette équation forme un sous-espace vectoriel de  $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ . En donner une base et la dimension.
2. On considère l'équation différentielle  $\theta'' + \omega^2 \sin \theta = 0$ . Est-ce que l'ensemble des fonctions du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  solutions de cette équation forme un sous-espace vectoriel de  $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ?

**Exercice 14.**

Nous considérons  $\mathbb{C}$  en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Quelle est sa dimension? En préciser une base.

**Exercice 15.**  $\diamond$

On considère  $\mathcal{P}$  l'ensemble des polynômes sur  $\mathbb{R}$ , de degré inférieur ou égal à 2. Un polynôme  $P$  de  $\mathcal{P}$  sera noté  $P(X) = a + bX + cX^2$ . Nous admettrons que  $\mathcal{P}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

1. Quelle est la dimension de  $\mathcal{P}$ ? En donner une base.
2. On considère les sous-ensembles de  $\mathcal{P}$  suivants :
  - (a)  $W_0 = \{P \in \mathcal{P} / P(0) = 3\}$ ,
  - (b)  $W_1 = \{P \in \mathcal{P} / P \text{ n'a pas de racine réelle}\}$  et
  - (c)  $W_2 = \{P \in \mathcal{P} / a = 0\}$ .

Lesquels sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{P}$ ? Pour ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, en donner une base et donner le vecteur des coordonnées d'un polynôme  $P$  arbitraire dans cette base.

3. De même, on considère les applications de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes :

- (a)  $f_0(P) = P(3)$ ,
- (b)  $f_1(P) = d$  ( $d \in \mathbb{R}$ ),
- (c)  $f_2(P) = P'(1)$ ,
- (d) Si  $P(X) = a_P + b_P X + c_P X^2$ , on pose  $f_3(P) = a_P \cdot a + b_P \cdot b + c_P \cdot c$  ( $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ),
- (e)  $f_5(P) = (a_P + b_P + c_P)^2$ .

Lesquelles sont des applications linéaires?