mai 2021

Ex. $\boxed{1}$

1) Produit scalaire = forme bilinéaire symétrique définie positive, i.e.

* $\phi(x,y) = \phi(y,x)$
* $\phi(x,x) \geq 0$
* $\phi(x,x) = 0$ entraîne $x = 0$

2) $\mathcal{F}$ orthogonale implique $\mathcal{F}$ libre. En effet si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ alors

$$\phi(e_j, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = 0$$

donc $\lambda_j \phi(e_j, e_j) = 0$

et $\lambda_j = 0$ (car $e_j \neq 0$)

Donc dim Vect($\mathcal{F}$)

= cardinal $\mathcal{F}$ = n

3) * $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, on normalise

$$f_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

* $u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, on pose

$$v_2 = u_2 - pr_{f_1}(u_2)$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \langle f_1, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle f_1$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

on normalise

$$f_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = v_2$$

* $u_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, on pose

$$v_3 = u_3 - pr_{f_1, f_2}(u_3)$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} - \langle f_1, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\rangle f_1 - \langle f_2, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\rangle f_2$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\rangle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}$$

on normalise $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Ex. 2

1) $f_1 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$\tilde{w} = w - pr_{f_1}(w)$

$$= \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-6\\3\\5\end{pmatrix}$$

on normalise

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{36+9+25}}\begin{pmatrix}-6\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-6\\3\\5\end{pmatrix}$$

2) $pr_{f_1,f_2}(b)$

$$= \langle f_1, b\rangle f_1 + \langle f_2, b\rangle f_2$$

$$= \frac{1}{5}\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} +$$

$$\frac{1}{70}\left\langle \begin{pmatrix}-6\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}-6\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{3}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{27}{70}\begin{pmatrix}-6\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{70}\begin{pmatrix}-42+162\\-84-81\\-27\times 5\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}24\\-33\\-27\end{pmatrix}$$

3) $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est normal à E

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & \vec{i}\\ 2 & 1 & \vec{j}\\ 0 & 1 & \vec{k}\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

donc E a pour équation cartésienne $2x - y + 3z = 0$

4) $Ax \in \mathrm{Vect}(v, w) = E$

$b \neq pr_E(b)$ donc $b \notin E$

donc $Ax = b$ n'a pas de solutions.

5) le minimum de $\|Ax - b\|$ est réalisé lorsque $Ax = pr_E(b)$

donc $Ax = p$. Si $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

alors

$$x_1 \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}24\\-33\\-27\end{pmatrix}$$

donc $x_2 = -\frac{27}{14}$

puis $x_1 = \frac{24}{14} + x_2 = -\frac{3}{14}$

Ex. 3

1) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 9x_3^2$

$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - (2x_2 + 3x_3)^2 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 9x_3^2$

$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 + 4x_2x_3$

$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2$

2) rang 3 signature $(2,1)$

ϕ n'est pas un produit scalaire car signature $\neq$ (dimension, 0)

3) base ϕ-orthogonale

1^er^ vecteur $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

2^e^ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix}-5/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$

3^e^ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

$x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 1/2$

$\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

Ex 4

1) $f(x) = e^{|x|}$ donc f est paire

2) Donc $b_n(f) = 0$ et

$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi e^x\,dx$

$= \frac{1}{\pi}(e^\pi - 1)$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^x \cos(nx)\,dx$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^x}{n^2+1}(\cos(nx) + n\sin(nx))\right]_0^\pi$

$$a_n = \frac{2}{\pi(n^2+1)}\left(e^{\pi}\cos(n\pi) - 1\right)$$

$$= \frac{2}{\pi(n^2+1)}\left(e^{\pi}(-1)^n - 1\right)$$

3) f est continue sur $[-\pi, \pi]$, C^1 par morceaux

$f(\pi) = f(-\pi)$ donc

par le théorème de Dirichlet

$f(x) =$ série de Fourier de f en x

4) $f(0) = 1$ (déf)

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$1 = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi} - 1\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(n^2+1)}\left(e^{\pi}(-1)^n - 1\right)$$

d'où le résultat de l'énoncé

4) $\sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - \frac{1}{26} + \frac{1}{37} - \frac{1}{50} + \frac{1}{65} - \frac{1}{82} + \frac{1}{101}$$

$\approx -0.3595\ldots$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}$$

$\simeq -8.4229$ on divise par e^{π}

$\to -0.3640\ldots$

donc le résultat de l'énoncé est vraisemblable

6) $f(\pi) = e^{\pi}$ (déf.)

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, e^{\pi}}{\pi(n^2+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

Donc $a_0 + \frac{2}{\pi}e^{\pi}\beta - \frac{2}{\pi}A = e^{\pi}$ (*)

On a aussi $a_0 + \frac{2}{\pi}e^{\pi}A - \frac{2}{\pi}\beta = 1$

on multiplie $(*)$ par e^{π}

et on additionne

$$a_0(e^{\pi}+1) + \frac{2}{\pi}(e^{2\pi}-1)\, B$$

$$= e^{2\pi}+1$$

D'où $B = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$

$$-\frac{\pi}{2}\,\frac{a_0(e^{\pi}+1)}{e^{2\pi}-1}$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1} - \frac{1}{2}$$