UGA Mat404 2019/20

Examen DM du 25 juin 2020, prévu pour être fait en 2 heures dans les conditions d'un examen surveillé.
A rendre au plus tard le 26 juin (16h) dans la section "Travaux" de
`https://chamilo.univ-grenoble-alpes.fr/courses/GBX4MT44/`
Le sujet comporte 2 pages.
Toutes les réponses doivent être justifiées! Documents, calculatrices et ordinateur autorisés.

Exercice 1

On considère les espaces vectoriels réels $V = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (fonctions infiniment dérivables) et $V_2 = \mathbb{R}_2[X]$ (polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2).

1. L'application $\Phi : V_2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\Phi(P) = 2P'(0) + P(1)$$
est-elle linéaire ? Si oui, décrire son noyau et son image.
2. L'application $\Psi : V_2 \to V_2$ définie par
$$\Psi(P) = \Phi(P)P$$
est-elle linéaire ? Si oui, décrire son noyau et son image.
3. Le sous-ensemble $W = \{f \in V \ : \ f'(t) + f(t) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$ de V est-il un sous-espace vectoriel ? Si oui, donner sa dimension, et une base de W.
4. Le sous-ensemble $W = \left\{f \in V \ : \ f'(t) + f(t)^2 = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\right\}$ de V est-il un sous-espace vectoriel ? Si oui, donner sa dimension, et une base de W.

Exercice 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) = 2xx' + 2yy' + 5zz' + 2xz' + 2zx' + \alpha(xy' + yx' + yz' + zy').$$

1. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique, et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Rappeler la définition d'une forme bilinéaire non-dégénérée, et déterminer les valeurs de α pour lesquelles ϕ est non-dégénérée.
3. Rappeler la définition de la forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique, et donner l'expression de la forme quadratique q_ϕ associée à ϕ.
4. Donner la signature de ϕ en fonction de α. Pour quelles valeurs de α s'agit-il d'un produit scalaire ?
5. Donner une base ϕ-orthogonale de $\mathbb{R}^3$ (votre base pourra dépendre du paramètre α).
6. Pour $\alpha = 3$, montrer que la forme est de signature $(2,1)$. Pour cette valeur de α, existe-t-il un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $v \neq 0$ et $q_\phi(v) = 0$? Si oui, donner un tel vecteur.

Exercice 3

Sur l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$, on considère la forme :

$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} t^2 P(t)Q(t)\, dt$$

1. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Déterminer la matrice de ϕ (restreinte à $\mathbb{R}_2[X]$) dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que ϕ restreinte à $\mathbb{R}_2[X]$ est un produit scalaire, et donner une base ϕ-orthonormée (v_0, v_1, v_2) de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Dans la suite, on fixe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ (de degré quelconque). Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ de degré ≤ 2 tel que $P - Q$ est ϕ-orthogonal à v_0, à v_1 et à v_2. Donner une formule explicite pour $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$.
5. Si Q est l'unique polynôme de la question précédente, montrer que $P - Q$ est ϕ-orthogonal à tout polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$.
6. On garde les notations des deux questions précédentes pour P et Q, et on note q_ϕ la forme quadratique associée à ϕ. Montrer que pour tout $R \in \mathbb{R}_2[X]$, $q_\phi(P - R) = q_\phi(P - Q) + q_\phi(Q - R)$, et en déduire la valeur de
$$\min_{R \in \mathbb{R}_2[X]} q_\phi(P - R).$$
7. Déterminer le minimum de $q_\phi(X^4 - R)$, pour $R \in \mathbb{R}_2[X]$ quelconque.
8. ϕ est-elle encore un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$? Comment pourrait-t-on déterminer le minimum de $q_\phi(X^4 - R)$ pour $R \in \mathbb{R}_3[X]$?