Exercice 1

On considère les espaces vectoriels réels $V = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (fonctions infiniment dérivables) et $V_2 = \mathbb{R}_2[X]$ (polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2).

1. Si $P = aX^2+bX+C$, $\Phi(P) = a+3b+c = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = MV$, où M est la matrice 1×3 réelle $\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, et V le vecteur colonne des coordonnées V de P dans la base $X^2, X, 1$. Un résultat du cours dit que Φ est alors linéaire. L'image de Φ n'est pas réduite à $\{0\}$ car $\Phi(1) = 1$, donc $Im(\Phi) = \mathbb{R}$. Le noyau est l'ensemble des polynômes de la forme $P = aX^2+bX+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, qui satisfont $a+3b+c = 0$, qui est de dimension 2 (une base en est $3X^2-X, X^2-1$).
2. On a $\Psi(1) = 1$ et $\Psi(2) = 4$ donc Ψ n'est pas linéaire ; en effet, si elle l'était, on aurait $\Psi(2) = \Psi(2\cdot 1) = 2\Psi(1) = 2$.
3. Les éléments de W sont les fonctions de la forme Ce^{-t} pour $C\in\mathbb{R}$, ce que l'on peut écrire comme $Vect(\{f_0\})$ avec $f_0(t) = e^{-t}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ (noter que $f_0\in V$). Donc W est bien un sous-espace vectoriel de V. Par construction, $B = \{f_0\}$ est une partie génératrice, et f_0 est non nulle, donc c'est aussi une partie libre de V, donc B est une base, qui a un seul élément. Ceci implique que $\dim(W) = 1$.
4. L'équation différentielle $f'+f^2 = 0$ n'est pas linéaire, donc on pourrait s'attendre à ce que l'ensemble des solutions ne soit pas un espace vectoriel, mais il se passe ici quelque chose d'inattendu ! L'équation n'a presque aucune solution définie sur $\mathbb{R}$, en fait la seule qui le soit est la fonction nulle $f = 0$. En effet, les autres sont de la forme $f(t) = \frac{1}{C-t}$, $C\in\mathbb{R}$ qui ne sont sont pas définies partout. Donc W est (accidentellement) un sous-espace vectoriel, de dimension 0 (et de base vide).

Exercice 2

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par

$$= 2xx'+2yy'+5zz'+2xz'+2zx'+\alpha(xy'+yx'+yz'+zy').$$

1. On a
$$\phi(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \alpha & 2\\ \alpha & 2 & \alpha\\ 2 & \alpha & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$
donc ϕ est bilinéaire, et sa matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix}2 & \alpha & 2\\ \alpha & 2 & \alpha\\ 2 & \alpha & 5\end{pmatrix}$. Comme ${}^tM = M$, ϕ est symétrique.
2. ϕ est non-dégénérée si et seulement si le noyau de ϕ est réduit au vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, où le noyau $Ker(\phi)$ est l'ensemble des vecteurs $v\in\mathbb{R}^3$ tels que $\phi(v,w) = 0$ pour tout $w\in\mathbb{R}^3$. En termes matriciels, ceci revient à dire que $\ker(M)$ est trivial. Pour déterminer $\ker(M)$, on applique le pivot de Gauss (par exemple les opérations $L_2\to L_2-\frac{\alpha}{2}L_1$ et $L_3\to L_3-L_1$) et on voit que $\ker(M) = \ker(N)$ avec $N = \begin{pmatrix}2 & \alpha & 0\\ 0 & 2-\frac{\alpha^2}{2} & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Le noyau est trivial si et seulement si $2-\frac{\alpha^2}{2}\neq 0$, c'est-à-dire $\alpha\neq\pm 2$.
3. La forme quadratique associée à une FBS ϕ est la fonction $q_\phi : V\to\mathbb{R}$ définie par $q_\phi(v) = \phi(v,v)$ pour tout $v\in V$. Ici $q_\phi(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) = 2x^2+2y^2+5z^2+4xz+2\alpha(xy+yz)$.
4. $2x^2+2y^2+5z^2+4xz+2\alpha(xy+yz) = 2(x+\frac{\alpha}{2}y+z)^2+(2-\frac{\alpha^2}{2})y^2+3z^2$, et pour tout α, il s'agit bien d'une réduction de Gauss (en d'autres termes les formes linéaires $(x',y',z') = (x+\frac{\alpha}{2}y+z, y, z)$ sont indépendantes. La signature est

donnée par le signe des coefficients $2, 2-\frac{\alpha^2}{2}, 3$, c'est-à-dire signature $(2,1)$ si $|\alpha|>2$, $(2,0)$ si $|\alpha|=2$, et $(3,0)$ si $|\alpha|<2$.
Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, ϕ est un produit scalaire si et seulement si elle est de signature $(3,0)$, c'est-à-dire pour $|\alpha|<2$.

5. Comme on a $x = x' - \frac{\alpha}{2}y' - z'$, $y = y'$, $z = z'$, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne la matrice de passage de la base canonique vers la base cherchée. En d'autres termes, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est ϕ-orthogonale.

6. Oui, il en existe. Avec les notations de la question précédente, on a $q_\phi(x,y,z) = 2x'^2 - \frac{5}{2}y'^2 + 3z'^2$, donc on peut prendre $x' = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $y' = \sqrt{2}$ et $z' = 0$. Ceci revient à prendre $x = \sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$, $z = 0$, en d'autres termes $v = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ satisfait $q_\phi(v) = 0$.

Exercice 3

considère la forme :

$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} t^2 P(t)Q(t)dt$$

1. Clairement $\phi(P,Q) = \phi(Q,P)$, donc ϕ est symétrique. Pour tous $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a on a

$$\phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q) = \int_{-1}^{1} t^2(\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t))Q(t)dt = \lambda_1 \int_{-1}^{1} t^2 P_1(t)Q(t)dt + \lambda_2 \int_{-1}^{1} t^2 P_2(t)Q(t)dt = \lambda_1\phi(P_1,Q) + \lambda_2\phi(P_2,Q),$$

donc ϕ est linéaire par rapport à sa 1ère variable. Par symétrie, elle est linéaire par rapport à sa 2è variable.

2. On calcule $\phi(X^j, X^k)$ pour tout $j,k = 0,1,2$. Noter que comme l'intervalle de d'intégration est symétrique par rapport à 0, $\phi(X^j,X^k) = 0$ pour $j+k$ impair. Après calculs pour $j+k$ pair (les faire !), on trouve

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

3. On considère la forme quadratique associée, $q(P) = \phi(P,P)$. Pour $P = a + bX + cX^2$, ceci donne par la question précédente

$$q(P) = \frac{2}{3}a^2 + \frac{2}{5}b^2 + \frac{2}{7}c^2 + \frac{4}{5}ac.$$

Après réduction de Gauss, on a

$$q(P) = \frac{2}{3}(a + \frac{3}{5}c)^2 + \frac{2}{5}b^2 + \frac{8}{175}c^2,$$

et comme (les formes linéaires $a' = a + \frac{3}{5}c, b' = b, c' = c$ sont indépendantes et) les coefficients $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{175}$ sont >0, la signature de la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_2[X]$ est $(3,0)$. Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Pour trouver une base ϕ-orthogonale, on écrit $a = a' - \frac{3}{5}c'$, $b = b'$, $c = c'$, ou encore

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La base donnée par les vecteurs dont le coordonnées dans la base canonique sont les colonnes de A, à savoir $\tilde{B} = (1, X, X^2 - \frac{3}{5})$ donne une base ϕ-orthogonale avec $q_\phi(1) = \frac{2}{3}$, $q_\phi(X) = \frac{2}{5}$, $q_\phi(X^2 - \frac{3}{5}) = \frac{8}{175}$.

Pour obtenir une base ϕ-orthonormée, on normalise en remplaąnt v par $v/\sqrt{q_\phi(v)}$, pour v dans $\tilde{B}$, ce qui donne la base ϕ-orthonormée suivante $B = (v_0, v_1, v2) = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}X, \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(X^2 - \frac{3}{5}))$.

4. On a, pour tout $j = 0, 1, 2$,

$$\phi(P - \sum_{k=0}^{2} \lambda_k v_k, v_j) = \phi(P, v_j) - \sum_{k=0}^{2} \lambda_k \phi(v_k, v_j) = \phi(P, v_j) - \lambda_j,$$

   où on a utilisé la bilinéarité de ϕ, et le fait que v_0, v_1, v_2 est ϕ orthonormée, càd. $\phi(v_k, v_j) = 0$ pour $k \neq j$ et $\phi(v_j, v_j) = 1$.

   La condition de l'énoncé est donc équivalent à $\lambda_j = \phi(P, v_j)$ pour tout $j = 0, 1, 2$, donc l'unique polynôme recherché est $\sum_{j=0}^{2} \phi(P, v_j) v_j$.

5. On écrit $R = \sum_{j=0}^{2} \mu_j v_j$ pour $\mu_j \in \mathbb{R}$. Alors $\phi(P - Q, R) = \phi(P - Q, \sum_{j=0}^{2} \mu_j v_j) = \sum_{j=0}^{2} \mu_j \phi(P, v_j) = 0$ (on a utilisé la bilinéarité de ϕ, et la question précédente).

6. Noter que comme $Q - R$ est dans $R_2[X]$, la question précédente implique que $\phi(P - Q, Q - R) = 0$. On a alors $q_\phi(P - R) = q_\phi(P - Q + Q - R) = q_\phi(P - Q) + q_\phi(Q - R) + 2\phi(P - Q, Q - R) = q_\phi(P - Q) + q_\phi(Q - R)$.

   Comme ϕ est un produit scalaire sur $R_2[X]$, $q_\phi(Q - R) \geq 0$, ce qui donne $q_\phi(P - R) \geq q_\phi(P - Q)$ pour tout $R \in \mathbb{R}_2[X]$. Comme $Q \in R_2[X]$, on a $\min_{R \in \mathbb{R}_2[X]} q_\phi(P - R) = q_\phi(P - Q)$.

7. On calcule les λ_j comme dans la question 4 pour $P = X^4$, càd. $\lambda_j = \phi(X^4, v_j)$, ou encore $\lambda_0 = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot t^4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{7}$, etc.

   Toujours avec les notations de la question 4, on trouve $Q = \frac{\sqrt{6}}{7} v_0 + \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{7}} v_2 = \cdots = \frac{10}{9} X^2 - \frac{5}{21}$.

   Enfin, le minimum est donné par $q_\phi(P - Q) = \cdots = \frac{128}{43659}$.

8. 0ui, car $\phi(P, P) \geq 0$, et si $\phi(P, P) = 0$ càd. $\int_{-1}^{1} t^2 P(t)^2 \, dt = 0$, et comme $t^2 P(t)^2$ est continue et positive, ceci implique $t^2 P(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$, donc P a une infinité de racines, donc $P = 0$.

   On complèterait v_0, v_1, v_2 en un base v_0, v_1, v_2, v_3 ϕ-orthonormée (on peut prendre $\frac{21}{2\sqrt{2}}(X^3 - \frac{5}{7}X)$ par exemple).

   Pour $P = X^4$, on trouverait un unique $Q = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k v_k$ tel que $P - Q$ soit orthogonal à tout $\mathbb{R}_3[X]$. Comme $\phi(X^4, X^3) = \phi(X^3, X) = 0$, ceci donne le même $Q = \frac{10}{9} X^2 - \frac{5}{21}$ que dans l'exo précédent, donc le minimum est le même, que l'on considère $\mathbb{R}_2[X]$ ou $\mathbb{R}_3[X]$.