UGA Mat404 2023

Examen du 26 mai, 15h45-17h45.

Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.

Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.

Ce sujet est composé d'une question de cours et de 4 exercices (barême indicatif non contractuel : 2, 5, 5, 4, 5).

Question de cours

Que peut-on dire de deux fonctions ayant les mêmes coefficients de Fourier ? Justifier votre réponse.
Quels sont les coefficients de Fourier de la fonction $x \mapsto 3\sin(x) + \sin(3x)$?

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons la forme Φ_α, définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3,\ \Phi_\alpha(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + \alpha x_2y_2 + 5x_3y_3$$

1. Justifier que Φ_α est une forme bilinéaire symétrique et donner sa matrice M_α dans la base canonique.
2. Soit q_α la forme quadratique associée à Φ_α. En appliquant l'algorithme de Gauss, donner la signature de q_α (on discutera les cas selon les valeurs de α).
3. Pour quelles valeurs de α la forme Φ_α est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?
4. Pour $\alpha = 6$, donner une matrice P telle que $P^t M_\alpha P = \mathrm{Id}$.

Exercice 2

Soit l'application linéaire φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Vérifier que l'image de φ est le plan P d'équation $x + y = 2z$.
2. Déterminer une base orthonormée de P en appliquant le procédé de Gram-Schmidt aux deux colonnes de A.
3. Vérifier que $b = (1,0,0)$ n'est pas dans l'image de φ. L'équation $Av = b$ admet-elle des solutions $v \in \mathbb{R}^2$?
4. Déterminer p, le projeté orthogonal de b sur $\mathrm{Im}(\varphi)$ (pour le produit scalaire usuel). Déterminer $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $Av = p$
5. Montrer que pour tout $w \in \mathbb{R}^2$
$$\|Av - b\| \leq \|Aw - b\|$$
Remarque : on dit que v est solution de $Av = b$ au sens des moindres carrés.

Exercice 3

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ qui soit à la fois orthogonale pour q et orthonormale pour le produit scalaire canonique. En déduire la signature de q.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = x^2 \text{ si } x \geq 0, \quad f(x) = -x^2 \text{ si } x < 0$$

1. Déterminer la parité de la fonction f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f sur $[-\pi, \pi]$. Aide aux calculs : on pourra utiliser sans justification les primitives suivantes :

$$\int x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{(n^2x^2 - 2)\sin(nx) + 2nx\cos(nx)}{n^3}, \quad \int x^2 \sin(nx)\, dx = \frac{(2 - n^2x^2)\cos(nx) + 2nx\sin(nx)}{n^3}$$

3. En quels points de $[-\pi, \pi]$ la fonction f est-elle égale à son développement en série de Fourier ? Justifier.
4. Montrer qu'on peut appliquer l'identité de Parseval. Déterminer à la calculatrice une valeur approchée des deux membres de cette identité (on pourra approcher la somme de la série en n par la somme partielle à l'ordre $N = 10$ ou N=quelques dizaines).