UGA Mat404 2022

Examen du 27 juin, 11h45-13h45.

Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.
Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.
Ce sujet est composé de 4 exercices sur 2 pages (barême indicatif non contractuel : 2, 4, 6, 8).

1 Question de cours

Que peut-on dire des coefficients de Fourier d'une fonction paire ? Justifier votre réponse.

2 Forme quadratique

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Donner l'expression de $q(x,y,z)$.
2. Déterminer une base q-orthogonale.
3. q est-il un produit scalaire ?

3 Produit scalaire

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs réelles muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt$$

On notera $e_1 \in E$ la fonction constante égale à 1 sur $[-1,1]$, $e_2 \in E$ la fonction définie par $e_2(t) = t$, $e_3 \in E$ la fonction définie par $e_3(t) = \cos(t)$. Vous pouvez utiliser 1, t et $\cos(t)$ pour désigner e_1, e_2 et e_3 (abus de notation).

1. Vérifier que $e_1 \perp e_2$, déterminer la norme de e_1 et e_2
2. Déterminer la projection orthogonale de e_3 sur l'espace vectoriel F engendré par e_1 et e_2
3. Quelle est la distance de e_3 à F ?
4. Soit G l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3. Quelle est la dimension de G ?
5. Déterminer une base orthonormale de G.

4 Série de Fourier

Pour $x \in [-\pi,\pi]$, on pose $f(x) = |\sin(x)|$.

1. Étudier la parité de f.
2. À l'aide d'une double intégration par partie, établir pour tout $n > 1$,

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)dx = -\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}$$

3. Calculer les coefficients de Fourier de f et donner sa série de Fourier $S(f)$.
4. Pour quels points $x \in]-\pi,\pi[$ la série $S(f)(x)$ converge t-elle ? Quelle est sa limite ? (on justifiera les réponses).

5. En évaluant f et $S(f)$ en des points convenables, calculer

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

6. Sous quelle condition peut-on appliquer le théorème de Parseval ?
7. Calculer

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$