Examen du mardi 25 mai, 13h30-15h30.
Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.
Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.
Ce sujet est composé de 4 exercices (barême indicatif non contractuel : 4, 6, 4, 6).

Exercice 1 (cours)

Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une famille de vecteurs non nuls. On considère une forme bilinéaire ϕ définie sur $V \times V$.

1. À quelles conditions ϕ est-elle un produit scalaire ?
2. On suppose que ϕ est un produit scalaire et que la famille $\mathcal{F}$ est orthogonale. Montrer que $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) = n$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base ci-dessous :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique le plan vectoriel E engendré par les vecteurs $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice formée par les 2 vecteurs colonnes v et w

1. Donner une base orthonormée de E.
2. Déterminer p, la projection orthogonale du vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sur E.
3. Donner une équation cartésienne de E.
4. Montrer que le système $Ax = b$ n'a pas de solutions $x \in \mathbb{R}^2$.
5. On appelle solution de $Ax = b$ au sens des moindres carrés un vecteur x tel que $\|Ax - b\|$ soit le plus petit possible. Montrer que $Ax = p$, en déduire x.

Exercice 3

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule suivante

$$q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 9x_3^2.$$

1. En appliquant la méthode de Gauss, décomposer $q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ en sommes et différences de carrés.
2. Donner le rang et la signature de q. Soit ϕ la forme billinéaire associée à q. Est-ce que ϕ est un produit scalaire ?
3. Donner une base $\mathcal{B}$ qui soit $\phi-$orthogonale. Est ce que $\mathcal{B}$ peut être choisie $\phi-$orthonormale ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la parité de la fonction f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f sur $[-\pi, \pi]$. On pourra utiliser sans justification :

$$\int e^{x} \cos(nx)\, dx = e^{x} \left(\frac{\cos(nx)}{n^2+1} + \frac{n \sin(nx)}{n^2+1} \right)$$

3. En quels points de $[-\pi, \pi]$ la fonction f est-elle égale à son développement en série de Fourier ? Justifier.
4. En calculant $f(0)$ de deux manières montrer que

$$e^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \pi - \frac{1}{2} e^{\pi} + \frac{1}{2}$$

5. On admet que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1} - \frac{1}{2}$$

   Vérifiez l'identité de la question 4 en calculant à la calculatrice une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et en comparant avec la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ pour $N = 10$.
6. *Bonus*
   En utilisant la question 4 et en calculant $f(\pi)$ de deux manières montrer que $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ vérifient un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues, en déduire la valeur de B admise à la question 5.