Contrôle continu du lundi 13 mars, 8 h 00-10 h 00.

Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrices autorisées.
Téléphones portables, ordinateurs, objets connectés… interdits.

Exercice 1 (5 points)

1. **(Question de cours)** Soit V un espace vectoriel, q une forme quadratique sur V, et φ_q la forme bilinéaire symétrique associée (ou forme polaire). Rappeler les formules qui permettent de calculer φ_q à partir de q, et réciproquement.
2. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par
$$q(x,y,z) = -x^2 + y^2 + z^2 - 7yz.$$
   (a) Donner la forme polaire φ_q associée à q.
   (b) Donner la matrice associée à φ_q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Donner une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
   (d) En déduire la signature de q.

Exercice 2 (7 points)

Sur $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées de taille 2, on considère la forme $\tau(A,B) = \mathrm{Tr}(AB)$ où Tr est la trace d'une matrice. On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A. On rappelle que la trace est une forme linéaire sur V, que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ et $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$.

1. Montrer que τ est une forme bilinéaire symétrique sur V.
2. Justifier $\tau({}^tA,B) = \tau(A,{}^tB)$.
3. On pose $W_1 = \{A \in V \mid A = {}^tA\}$ l'espace des matrices symétriques, $W_2 = \{A \in V \mid A = -{}^tA\}$ l'espace des matrices antisymétriques. En remarquant que toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit comme somme de la matrice symétrique $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et de la matrice antisymétrique $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$, montrer que $V = W_1 \oplus W_2$ (W_1 et W_2 sont supplémentaires dans V).
4. Montrer que W_1 est orthogonal à W_2 pour τ : pour tout $(A,B) \in W_1 \times W_2$, $\tau(A,B) = 0$.
5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Calculer $\tau({}^tA,A)$. Quel est le noyau de τ ?
6. Donner une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée uniquement de vecteurs de W_1 ou W_2. Déterminer la matrice de τ dans cette base. Expliciter votre méthode et détailler les calculs.
7. En déduire le rang et la signature de τ.

Exercice 3 (8 points)

On se place dans $V = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, et on pose pour $P \in V$:
$$q_\alpha(P) = \alpha\big(P''(0)\big)^2 + \int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t$$
où α est une constante réelle.

1. Pour vérifier que q_α est une forme quadratique, donner l'expression de la forme polaire associée φ_α. Vérifier que c'est bien une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer que φ_α est un produit scalaire si $\alpha \geq 0$.
3. En posant $P(X) = a + bX + cX^2$, déterminer l'expression de $q_\alpha(P)$ en fonction de a, b, c.
4. En déduire la matrice M_α de la forme q_α dans la base $(1, X, X^2)$.
5. Réduire par la méthode de Gauss l'expression de q_α en sommes de carrés.
6. En déduire le rang, la signature de q_α en fonction de α, et une base q_α-orthogonale de V.
7. Pour quelles valeurs de α φ_α est-elle un produit scalaire ?