Partiel

exo 1.1 $f : X \longrightarrow AX$

$$f(X+\lambda Y) = A(X+\lambda Y)$$
$$= AX + \lambda AY$$
$$= f(X) + \lambda f(Y)$$

$f(X) = AX = Y$ $\quad Y$ donné

X recherché

Il existe une solution unique si A est une matrice inversible

1.2 feuille TD 1 exo 4

1.3 Matrice triangulaire $\rightarrow$ système triangulaire (avec coeffs non nuls sur la diagonale)

$\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$

Thm rang $\Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$

exo 2 1) $\phi(P_1 + \lambda P_2, Q)$

à vérifier $= \phi(P_1, Q) + \lambda \phi(P_2, Q)$

de même de l'autre côté

ϕ n'est ni sym ni antisym

2) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b+1 & b(a+1) \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}_1$

3) M_2 pour $a=0$ et $b=1$

$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

matrice de passage de $\{1, X\}$ à $\{X-1, X+1\}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \end{matrix}$$

$$M_2 = {}^tP M_1 P$$

on pouvait vérifier avec

ici $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4) ϕ est bilinéaire symétrique si et seulement si sa matrice M_1 est symétrique, donc ssi $a = b+1$

5) On est dans le cas symétrique

$b = 0$ et $a = 1 = b+1$

$\mathrm{Ker}(\phi)$ et $\mathrm{Vect}(X)^{\perp}$ ont bien un sens.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(M_1) \begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0$

$\quad\shortparallel$

$\mathrm{Ker}(\phi) = \{\vec{0}_{\mathbb{R}_1[X]}\} = \{0\}$

X a comme coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$P \in Vect(X)^\perp$

P a le coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$(P = a + bX)$

$$(a \quad b)\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (0)$$

$a = 0$

$Vect(X)^\perp = Vect(X)$

exo 3 ordre (x, y, z, t)

1) Matrice de q dans la base canonique = Matrice de ϕ la forme polaire de q

$$M = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-3&0&-2\\0&0&3&0\\0&-2&0&-1\end{pmatrix}$$

Où $\phi\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}\right)$

$= xx' - 3yy' - tt' + 3zz'$

$+ xy' + x'y - 2yt' - 2y't$

2)

$q(x, y, z, t)$

$= x^2 + 2xy - 3y^2 - t^2 + 3z^2 - 4yt$

$= (x+y)^2 - 4y^2 - 4yt - t^2 + 3z^2$

$= (x+y)^2 - (2y+t)^2 + 3z^2$

signature $(2,1)$ $\underline{\underline{\text{rang } 3}}$

On pouvait aussi chercher le rang de M par le pivot de Gauss

exo 4

1) • $V \subset U$

$\vec{0}_U \in V$

si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

on doit avoir $\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 \in V$

• $Ker(f) = \{\vec{u} \in U \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$

$\subset U$

$f(\vec{0}) = \vec{0}$ donc $\vec{0} \in U$

si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in Ker(f)$

$f(\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + \lambda f(\vec{v}_2)$

(car f linéaire)

$= \vec{0} + \lambda \vec{0} = \vec{0}$ $\underline{\underline{\text{ok}}}$

2) $\frac{\partial}{\partial x} \quad \underset{\substack{\Uparrow \\ U}}{f} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$

est bien définie, si f est indéfiniment dérivable, $\frac{\partial f}{\partial x}$ aussi

$f, g \in U$, $\lambda \in$