Contôle continu 1

Durée : 2h

Calculatrice et feuille recto-verso A4 autorisé

Exercice I

On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x^2 - 2xy + 5y^2 + 4yz$$

1.) Rappeler une formule permettant de retrouver la forme bilinéaire associée à q.

2.) Donner l'expression de la forme bilinéaire ϕ associée à q.

3.) Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4.) Appliquer l'algorithme de Gauss pour trouver une expression de q en somme de carrés. Quelle est la signature de q ? Quel est son rang ?

5.) Donner une base q-orthogonale en utilisant l'expression de q en somme de carrés.

6.) Quel est le noyau de ϕ ? Existe-t-il des vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $q(v) = 0$?

7.) Dessiner l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid q\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$.

Exercice II

On considère les applications $\phi \colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ et $b \colon \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définies par

$$\phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 4XP'$$

et

$$b(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1 - t^2)dt.$$

1.) Montrer que ϕ est linéaire.

On suppose pour les questions 2, 3 et 4 que $n = 2$.

2.) Calculer la matrice de ϕ dans la base $(1, X, X^2)$.

3.) Donner les valeurs propres de ϕ ainsi que les vecteurs propres associés.

4.) Montrer que b est bilinéaire et calculer la matrice de b dans la base $(1, X, 5X^2 - 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Dans la suite de l'exercice n désignera un entier positif quelconque.

5.) Montrer que b est un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$.

6.) Montrer que $b(\phi(P), Q) = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^2 P'(t)Q'(t)dt$. *Indication : On pourra intégrer par partie* $-\int_{-1}^{1}(1-t^2)^2 P''(t)Q(t)dt$.

7.) En déduire que $b(\phi(P), Q) = b(P, \phi(Q))$.

On admet l'existence d'une base $(L_0, \dots, L_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie $\deg(L_k) = k$ et $\phi(L_k) = k(k+3)L_k$.

8.) En utilisant la question précédente, montrer que la base $(L_0, \dots, L_n)$ est b-orthogonale.

9.) Montrer que pour tout $k \geq 1$ le polynôme L_k est b-orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

10.) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\int_{-1}^{1} L_k(t)(1-t^2)dt = 0$.

11.) En déduire que pour tout $k \geq 1$, le polynôme L_k possède une racine dans l'intervalle $]-1, 1[$.

La suite de l'exercice est en bonus.

On fixe $k \geq 1$. On souhaite montrer que toutes les racines de L_k sont simples et dans l'intervalle $[-1, 1]$.

On raisonne par l'absurde et on suppose que L_k possède soit une racine qui n'est pas dans l'intervalle $[-1, 1]$, soit une racine de multiplicité supérieure à 1. On note $t_1 < \dots < t_p$ les racines de L_k de l'intervalle $[-1, 1]$ qui sont de multiplicité impaire et on pose $Q = \prod_{i=1}^{p}(X - t_i)$.

12.) Montrer que

$$\int_{-1}^{1} Q(t)L_k(t)(1-t^2)dt = 0.$$

13.) En déduire que $L_k = 0$ et conclure. *Indication : On pourra montrer que le polynôme $Q \cdot L_k$ est de signe constant sur* $]-1, 1[$.