Mai 2019

1) a) B ϕ-orthogonale si M est diagonale
et B est ϕ-orthonormée si M est l'identité

b) signature = (rang, 0)
$= (2, 0)$
$= (\text{dimension}, 0)$

c) non car rang(M) = 2
et rang (N) = $\underline{1}$ (2 lignes égales)

2) a) i) $U_1 = P\,U_2$

ii) $\begin{cases} x_1 = x_2 + 2y_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_2 = x_1 - 2y_1$

b) i) $M_2 = {}^tP M_1 P$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) B_2 est donc une base ϕ-orthonormée, ϕ est définie positive

ex 2)

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - x_3^2$
$= (x_1 - 2x_2)^2 - x_2^2 - x_3^2$

signature (1, 2)

ϕ n'est pas un produit scalaire et n'a pas de base ϕ-orthonormée

3) Base ϕ-orthogonale

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ex 3)

1) $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}$ converge critère de Riemann

$\frac{1}{(2n+1)^4} \sim \frac{1}{16n^4}$ aussi même raison

2) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx$

$= \frac{1}{2\pi} \times 2 \int_0^{\pi} |x|\,dx$

$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\,dx$

$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

Pour $k \neq 0$,

$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx)\,dx =$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x| \cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\,\frac{\sin(kx)}{\cancel{x}k}\right]_0^{\pi}$$

$$- \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{k^2\pi}\left((-1)^k - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ -\frac{4}{k^2\pi} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

3) $a_k(f) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k \text{ pair} > 0 \\ -\frac{4}{k^2\pi} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$

4) $|x|$ est continue sur $[-\pi, \pi]$

et $\lim_{x \to -\pi} |x| = \pi = \lim_{x\to\pi} \pi$

donc les hypothèses du théorème de Dirichlet sont satisfaites sur $[-\pi, \pi]$ on a

$|x| =$ somme de sa série de Fourier

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{k \text{ impair}} -\frac{4}{k^2\pi}\cos(kx)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{k=(2n+1)\\ \text{impair}}} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)x)$$

5) Parseval

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k \text{ impair}} a_k^2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\times\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

Donc $\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{4^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$

$$= \frac{\pi^2}{3}$$

et $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{8}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

$$= \frac{\pi^4}{96}$$

On peut vérifier en calculant la somme des 10 premiers termes à la calculatrice que ce résultat est plausible

$$\frac{\pi^4}{96} \simeq 1.01468$$

$$\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{(2n+1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots + \frac{1}{19^4}$$

$$\simeq 1.01466$$

Exercice 4

1) $\langle 1, \cos \rangle$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx$

$= \left[\sin(x) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

donc $\{1, \cos\}$ est une base orthogonale de W

$\|1\|^2 = 2\pi \quad \left(= \int_{-\pi}^{\pi} dx\right)$

$\|\cos\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx$

$= \left[\frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_{-\pi}^{\pi}$

$= \pi$

donc $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos}{\sqrt{\pi}}\right\}$ orthonormée

2) $pr(f)$

$= \langle e_1 | f \rangle e_1 + \langle e_2 | f \rangle e_2$

3) Si f est impaire

$\langle e_1 | f \rangle = \langle e_2 | f \rangle = 0$

donc $pr(f) = 0$

4) $pr(1+\sin)$

$= pr(1) + pr(\sin)$

$= pr(1)$ car $\sin$ est impaire

$= 1$ car $1 \in W$

$pr(g) = g$ car $g \in W$

puisque $g(x) = \frac{1+\cos(x)}{2}$

5) $\{1, \sin\}$ est une base de W'

$p(1) = 1$ et $p(\sin) = 0$ donc

$\{\sin\}$ est une base de $\operatorname{Ker} p_W$