DS 1 MAT404

Université de Grenoble-Alpes,

14/02/2022

Thème : algèbre linéaire, formes bilinéaires

Exercice 1

On note $V = \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées 2×2 à coefficients réels.

(a) Rappeler la base canonique de $\mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que la famille $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est bien une base de V.

(c) Écrire la matrice de l'application $\gamma : \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ définie comme $\gamma(M) = {}^tM$ dans la base canonique et dans la base F.

Exercice 2

(a) Soit l'application $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\phi(P) = 4P - XP' - X^2P''$

1) Montrer que cette application est linéaire.

2) Donner le noyau et l'image de cette application et vérifiez le théorème du rang.

(b) Soit $k > 0$, on définit l'application $\psi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donnée par $\psi(f) = f'' - k^2 f$

1) Montrer que cette application est linéaire.

2) Montrer que $\mathrm{Ker}(\psi)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donnez en une base ainsi que sa dimension.

3) Donner l'image de ψ (On pourra appliquer Cauchy-Lipshitz sur un système bien choisi).

Exercice 3

Soit l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$

(a) Montrer que cette application est bilinéaire. Est-elle symétrique ?

(b) Donner sa matrice dans la base canonique ainsi que son rang.

(c) Calculer la matrice M_2 de Φ dans la base $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.