Université Grenoble Alpes
Licence 2[e] année

Année 2021-2022
MAT 404

Devoir surveillé n° 2 du 11 avril 2022

Durée : 1 h.
Documents autorisés : une page manuscrite recto-verso.
Téléphones portables interdits.
La rédaction et la précision des arguments sont des critères d'évaluation importants

Exercice 1. On définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ par la formule :

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad q(x,y,z,t) = x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 6xy + 4xz + 16yz + 4yt + 8zt.$$

1. Écrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Appliquer l'algorithme de réduction de Gauss à q pour l'écrire comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
3. En déduire la signature et le rang de q.
4. Donner une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^4$ pour q. Quelle est la matrice de q dans cette base ?
5. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. À quelle condition sur (α, β) la forme bilinéaire associée à la forme quadratique
$$q'(x,y,z,t) = q(x,y,z,t) + \alpha(y - z + t)^2 + \beta t^2$$
est elle un produit scalaire ?

Exercice 2.

1. Pour $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on définit $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ lorsque cette limite existe.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $J_n = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{2^n}$.
2. Démontrer que la formule
$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \langle P, Q\rangle = 2\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique $(1, X, X^2)$ pour déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Calculer la projection orthogonale du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
5. En déduire la valeur de
$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 + at^2 + bt + c)^2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$$
et pour quels triplets (a,b,c) cette valeur est atteinte.