Exercice 1. 1. $\varphi(Q,P) = Q(1)P(0) - Q(0)P(1) = -\varphi(P,Q)$ donc φ est antisymétrique. Pour $P, Q, \tilde{Q} \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconques,

$$\begin{aligned} \varphi(P, Q + \lambda\tilde{Q}) &= P(1)(Q + \lambda\tilde{Q})(0) - P(0)(Q + \lambda\tilde{Q})(1) \\ &= P(1)Q(0) - P(0)Q(1) + \lambda(P(1)\tilde{Q}(0) - P(0)\tilde{Q}(1)) \\ &= \varphi(P,Q) + \lambda\varphi(P,\tilde{Q}) \end{aligned}$$

donc φ est linéaire par rapport au deuxième argument. Par antisymétrie, elle est aussi linéaire par rapport au premier argument. Donc φ est bilinéaire antisymétrique.

2.
$$M = \begin{pmatrix} \varphi(1,1) & \varphi(1,X) & \varphi(1,X^2) \\ \varphi(X,1) & \varphi(X,X) & \varphi(X,X^2) \\ \varphi(X^2,1) & \varphi(X^2,X) & \varphi(X^2,X^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. La famille B' a 3 éléments, qui est la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, il suffit de montrer que B' est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que

$$\lambda_1 X + \lambda_2(X-1) + \lambda_3(X-1)^2 = 0$$

Le coefficient de X^2 donne $\lambda_3 = 0$, ensuite le coefficient constant donne $\lambda_2 = 0$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

4. La matrice de φ dans B' est par définition :

$$N = \begin{pmatrix} \varphi(X,X) & \varphi(X,X-1) & \varphi(X,(X-1)^2) \\ \varphi(X-1,X) & \varphi(X-1,X-1) & \varphi(X-1,(X-1)^2) \\ \varphi((X-1)^2,X) & \varphi((X-1)^2,X-1) & \varphi((X-1)^2,(X-1)^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part la matrice de passage de B à B' est :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et on vérifie la formule de changement de base pour une forme bilinéaire :

$$N = {}^tPMP$$

Exercice 2. 1. Comme $f(t)g(t) = g(t)f(t)$ pour tout $t \in [0,2]$, ϕ est symétrique.
Soient f_1, f_2, g des fonctions continues de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$, et λ un réel, on a :

$$\begin{aligned} \phi(f_1 + \lambda f_2, g) &= \int_0^2 (f_1 + \lambda f_2)(t)g(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 (f_1(t) + \lambda f_2(t))g(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 f_1(t)g(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_0^2 f_2(t)g(t)\mathrm{d}t \\ &= \phi(f_1,g) + \lambda\phi(f_2,g) \end{aligned}$$

donc ϕ est linéaire par rapport au premier argument, donc aussi par rapport au deuxième argument par symétrie.

2. Par définition B engendre W, il faut donc montrer que B est une famille libre pour avoir une base (attention, on ne connait pas encore la dimension de W). Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ trois réels tels que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ donc tels que pour tout $t \in [0,2]$ on ait :

$$\lambda_0 1 + \lambda_1(t-1) + \lambda_2(t-1)^2 = 0$$

On pose $t = 1$, on en déduit que $\lambda_0 = 0$. On divise par $t-1$ et on fait à nouveau $t = 1$, on en déduit que $\lambda_1 = 0$ puis $\lambda_2 = 0$.

3. $$\phi(f_1,f_0)=\int_0^2 (t-1)\ dt=\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_0^2=0$$
$$\phi(f_1,f_2)=\int_0^2 (t-1)(t-1)^2\ dt=\left[\frac{(t-1)^4}{4}\right]_0^2=0$$
Donc f_1 est orthogonal à f_0 et f_2.

4. On a donc 4 coefficients de la matrice M qui sont nuls. Il reste à déterminer les 5 autres
$$\phi(1,1)=\int_0^2 1\ dt=2$$
$$\phi(f_0,f_2)=\phi(f_2,f_0)=\int_0^2 (t-1)^2\ dt=\phi(f_1,f_1)=\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_0^2=\frac{2}{3}$$
$$\phi(f_2,f_2)=\int_0^2 (t-1)^4\ dt=\left[\frac{(t-1)^5}{5}\right]_0^2=\frac{2}{5}$$
Donc
$$M=\begin{pmatrix}2 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

5. $\phi(f_0,f_2-cf_0)=\phi(f_0,f_2)-c\phi(f_0,f_0)=\frac{2}{3}-2c$, qui est nul ssi $c=\frac{1}{3}$. La base $B'=(f_0,f_1,f_2-cf_0)$ est alors ϕ-orthogonale (car $\phi(f_1,f_2-cf_0)=\phi(f_1,f_2)-c\phi(f_1,f_0)=0$).

6. La matrice de ϕ dans la base B' est donc diagonale. Il faut calculer son dernier élément
$$\phi(f_2-cf_0,f_2-cf_0)=\phi(f_2,f_2)+c^2\phi(f_0,f_0)-2c\phi(f_0,f_2)=\frac{2}{5}+\frac{2}{9}-\frac{4}{9}=\frac{8}{45}$$
Donc
$$\mathrm{Mat}(\phi,B')=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{8}{45}\end{pmatrix}$$

7. On utilise la matrice de ϕ (=la matrice de q) dans la base B
$$q(a,b,c)=2a^2+\frac{4}{3}ac+\frac{2}{3}b^2+\frac{2}{5}c^2,$$

8. On a
$$q(a,b,c)=2\left(a+\frac{c}{3}\right)^2-2\left(\frac{c}{3}\right)^2+\frac{2}{3}b^2+\frac{2}{5}c^2=2\left(a+\frac{c}{3}\right)^2+\frac{2}{3}b^2+\frac{8}{45}c^2$$
(les formes linéaires $a+c/3,b,c$ sont bien indépendantes, puisqu'on a utilisé l'algorithme vu en cours)

9. Donc la signature de q est $(3,0)$ et son rang 3. La base q-orthogonale correspondante s'obtient en résolvant les trois systèmes :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a+\frac{c}{3} & = & a'\\ b & = & b'\\ c & = & c'\end{array}\right.$$
où (a',b',c') valent respectivement $(1,0,0)$ puis $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$, ce qui donne une base q-orthogonale $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1/3,0,1)$.

Exercice 3. 1. $\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = ax_1y_1 + 2x_2y_2 - ax_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$.

2. Le noyau de φ est le noyau de M, $\{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ MX = 0\}$. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est dans le noyau si et seulement si
$$\begin{cases} ax_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ -x_1 - ax_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + ax_3 = 0 \\ (1+a^2)x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$
Comme $1 + a^2 \neq 0$, la deuxième équation donne $x_3 = 0$, puis on trouve $x_1 = 0$. Donc $Ker(\varphi) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$. Par définition, le rang de φ est le rang de M, qui par le théorème du rang vaut $\dim(\mathbb{R}^3) - dim(Ker(M)) = 3$.

3. $F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 \ : \ \varphi(u,v) = 0\}$. Pour $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, on a $\varphi(u,v) = 0$ ssi $(a-2)u_1 - 2u_2 - (1+2a)u_3 = 0$. Comme cette équation est non-nulle (quel que soit a), $F^\perp$ est toujours de dimension 2. Les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ a-2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+2a \\ -2 \end{pmatrix}$ sont dans $F^\perp$, et $\{e_1, e_2\}$ forme un partie libre, car si $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$, alors en comparant les 1ères et 3ème composantes, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. C'est donc une base de $F^\perp$.

4. v est dans $(Vect\{v\})^\perp$ ssi $\varphi(v,v) = 0$, c.-à-d. ssi $(a-2)\cdot 1 - 2\cdot(-1) - 2(1+2a) = 0$, ce qui est équivalent à $a = -2/3$.

5. $q(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - ax_3^2 - 2x_1x_3$.

6. Si $a \neq 0$, $q(x_1,x_2,x_3) = 2x_2^2 + a(x_1 - \frac{1}{a}x_3)^2 - \frac{1+a^2}{a}x_3^2$. Si $a = 0$, $q(x_1,x_2,x_3) = 2x_2^2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2$. Les formes linéaires qui apparaissent dans les carrés sont indépendantes, parce qu'on a utilisé l'algorithme de réduction de Gauss (cas "pénible" pour $a = 0$).

7. Si $a = 0$, la forme est de signature $(2,1)$. Lorsque $a \neq 0$, a et $-(1+a^2)/a$ ont le signe opposé (car $1 + a^2 > 0$), donc la forme est aussi de signature $(2,1)$.

Exercice 4. 1. $0 = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,y) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) = \varphi(x,y) + \varphi(y,x)$, ce qui donne $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$.

2. (a) Par bilinéarité, $\varphi(z_0, bx - az_0) = b\varphi(z_0,x) - a\varphi(z_0,z_0) = ba - ab = 0$. Par $(\star)$, cette égalité implique $\varphi(bx - az_0, z_0) = 0$ donc $b\varphi(x,z_0) - a\varphi(z_0,z_0) = 0$, ou encore $b(\varphi(x,z_0) - \varphi(z_0,x)) = 0$. Comme $b \neq 0$, on a $\varphi(x,z_0) - \varphi(z_0,x) = 0$, donc $\varphi(x,z_0) = \varphi(z_0,x)$.

   (b) Comme $b \neq 0$, $\varphi(z_0, dz_0 + y) = bd + \varphi(z_0,y)$ n'est nul que pour $d = -\varphi(z_0,y)/b$, ceci laisse une infinité de valeurs possibles pour lesquelles $\varphi(z_0, dz_0 + y) \neq 0$. Par ailleurs, $\varphi(cz_0 + x, dz_0 + y) = c\varphi(z_0, dz_0 + y) + \varphi(x, dz_0 + y)$ et $\varphi(z_0, dz_0 + y) \neq 0$, donc il suffit de prendre $c = -\varphi(x, dz_0 + y)/\varphi(z_0, dz_0 + y)$. On choisit z_0, c et d comme dans l'énoncé. Par la partie 2(a), $\varphi(z_0,x) = \varphi(x,z_0)$ et $\varphi(z_0,y) = \varphi(y,z_0)$. En utilisant la bilinéarité, on a
$$\varphi(cz_0 + x, dz_0 + y) = cd\varphi(z_0,z_0) + c\varphi(z_0,y) + d\varphi(x,z_0) + \varphi(x,y)$$
$$\varphi(dz_0 + y, cz_0 + x) = cd\varphi(z_0,z_0) + c\varphi(y,z_0) + d\varphi(z_0,x) + \varphi(y,x).$$
   Comme $\varphi(cz_0 + x, dz_0 + y) = 0$, la condition $(\star)$ donne $\varphi(dz_0 + y, cz_0 + x) = 0$, et en prenant la différence de ces deux équations, on trouve $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

3. Si $\varphi(x,x) = 0$ pour tout x, le résultat de la question 1) dit que φ est antisymétrique. Sinon, on choisit un $z_0 \in V$ tel que $\varphi(z_0,z_0) \neq 0$. Alors le résultat de la question 2b) dit que φ est symétrique.