L2, Université Joseph Fourier
Algèbre bilinéaire et séries de Fourier (MAT 244)
2014-2015.

Calculatrices, téléphones, notes de cours, exercices interdits

CC2

Durée : 1 heure 30

1. Questions de cours

1. Soit Φ un produit scalaire sur un espace vectoriel V. À quelle condition une famille Φ-orthogonale est-elle une base Φ-orthonormale ?
2. Donner trois exemples de bases de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard qui soient respectivement orthonormale, orthogonale non orthonormale, non orthogonale.

2. Exercice

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \text{et } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.
2. Appliquer l'agorithme de Gram Schmidt pour trouver une base orthonormale (w_1, w_2, w_3) du sous-espace $\mathrm{vect}(v_1, v_2, v_3)$.

3. Exercice

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x, y) = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2$.

1. Appliquer la rédution de Gauss pour écrire q comme une combinnaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Quel est le rang de q ? Quelle est sa signature ? La forme polaire associée à q est-elle un produit scalaire ?
2. En déduire une base q-orthogonale.
3. Écrire la matrice de q dans la base canonique et calculer ses valeurs propres.
4. Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ qui soit à la fois q-orthogonale et orthonormale pour le produit scalaire canonique.
5. Écrire la matrice de q dans cette base.

4. Exercice

On définit le produit scalaire suivant sur $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

1. Vérifier que la famille $(1, \cos, \sin)$ est orthogonale pour ce produit scalaire.
2. Calculer la projection de la fonction $t \mapsto t^2$ sur le sous-espace $\mathrm{Vect}(1, \cos, \sin)$.
3. En déduire la borne inférieure de l'ensemble

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 - a - b\cos t - c\sin t)^2 dt \ \middle|\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour quelles valeurs de a,b et c est-elle atteinte ?