L2, Université Joseph Fourier
Algèbre bilinéaire et séries de Fourier (MAT 244)
2014-2015.

Calculatrices, téléphones, notes de cours, exercices interdits

CC2

Durée : 1 heure 30

1. Questions de cours

1. À quelle condition une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel est-elle un produit scalaire ?
2. Donner deux exemples de formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^2$, l'une qui est un produit scalaire et l'autre qui n'en est pas un.

2. Exercice

On considère l'espace $\mathbb{R}^3$, munie de la forme bilinéaire symétrique Φ définie par

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

On note (e_1, e_2, e_3) la base standard de $\mathbb{R}^3$.

1. Appliquer l'agorithme de Gauss à la forme quadratique associée à Φ, et en déduire que Φ est un produit scalaire.
2. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la base (e_1, e_2, e_3) pour donner une base Φ-orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

3. Exercice

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x, y) = 5x^2 - 6\sqrt{3}xy - y^2$.

1. Écrire la matrice M de q dans la base canonique et calculer ses valeurs propres.
2. Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ formés de vecteurs propres de M de norme 1.
3. Montrer que ces vecteurs sont q-orthogonaux.
4. Écrire la matrice de q dans cette base. Quelle est la signature de q ?

4. Exercice

Pour $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ on définit $\Phi(f, g) = \int_0^1 xf(x)g(x)$. On note W le sous-espace $\mathrm{Vect}(1, x)$ de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
2. Vérifier que la famille $(\sqrt{2}, 6x - 4)$ est une base Φ-orthonormale de W.
3. Calculer la projection orthogonale de $f(x) = x^3$ sur W.
4. En déduire la borne inférieure de l'ensemble

$$\left\{ \int_0^1 x(x^3 - a - bx)^2 dx \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$