Examen du 24 juin 2020, à faire en 2 heures dans les conditions d'un examen surveillé.
À rendre au plus tard le 25 juin à 8h30 dans Travaux sur :
`https://chamilo.univ-grenoble-alpes.fr/courses/GBX3MT39/`
Plusieurs questions sont individualisés avec votre numéro de carte d'étudiant, noté E.
Le sujet comporte 2 pages. Le barême est indicatif.
Toutes les réponses doivent être justifiées !

1. Congruences (3 points)

Soit a l'entier formé par les 4 premiers chiffres de votre numéro d'étudiant E et b celui formé par les 4 derniers chiffres. Déterminer un entier c compris entre 1 et 276740 tel que $c-a$ soit divisible par 137 et $c-b$ soit divisible par 2020. On donnera le détail des calculs.

2. Puissance modulaire (6 points)

(1) Expliquer comment on peut vérifier si 2027 est premier. Attention, on ne demande pas de faire tous les calculs nécessaires, mais d'indiquer quels calculs il faut faire.

(2) Votre numéro d'étudiant E est-il inversible modulo 2027 ? Si oui déterminer son inverse i.

(3) Calculer le reste r de la division de E^{2020} par 2027 par la méthode de la puissance rapide. Combien de divisions doit-on effectuer ?

(4) Lorsque E admet un inverse i, exprimer r en fonction d'une puissance de i. Cette méthode de calcul vous semble-t-elle plus efficace que la précédente ? Justifier.

3. Preuve par 9 et par F (11 points)

Dans cet exercice, on travaille avec des entiers positifs.

3.1. **Preuve par 9.** Pour tester si le produit de deux entiers écrits en base 10 est correct (sans calculatrice), on peut utiliser une méthode appelée **preuve par 9** décrite ci-dessous. On définit pour cela une fonction f sur les entiers et à valeur dans les entiers de 1 à 9 de la manière suivante : si $a=0$, on pose $f(0)=9$; si a est un entier strictement positif écrit en base 10, on calcule la somme de ses chiffres, et on recommence jusqu'à obtenir un entier compris entre 1 et 9 que l'on note $f(a)$.
Exemple 1 : si $a=12345$, alors $1+2+3+4+5=15$ puis $1+5=6$ donc $f(a)=6$.
Exemple 2 : si $b=670$, alors $f(b)=f(6+7+0)=f(13)=4$.
On observe alors que $ab=8271150$, $f(ab)=f(24)=6$ et $f(f(a)f(b))=f(6\times 4)=6$ sont égaux.

(1) Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de E, votre numéro de carte d'étudiant, par 10^5. Déterminer $f(q)$ et $f(r)$.

(2) Pour k entier, déterminer la classe de 10^k dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

(3) Soit a un entier, comparer les classes de a et $f(a)$ dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

(4) Soient a et b deux entiers, déterminer $f(ab)$ en fonction de $f(a)$ et de $f(b)$.

(5) Si $f(c)\neq f(f(a)f(b))$, peut-on en déduire que $c\neq ab$? Si $f(c)=f(f(a)f(b))$, peut-on en déduire que $c=ab$?

(6) Comparer $f(E)$ et $f(q+r)$. Est-ce toujours vrai ?

(7) Donner un programme C ou Python ou un algorithme en langage naturel pour calculer $f(a)$.

3.2. **Preuve par F.** On veut adapter la méthode précédente pour vérifier le produit de deux entiers écrits en base 16, les chiffres sont donc compris entre 0 et F (quinze). On calcule $g(a)$ en faisant la somme des chiffres de a en base 16 et en recommançant jusqu'à obtenir un entier compris entre 1 et F (quinze).

(1) Déterminer l'écriture des entiers q et r de la question 3.1.(1) en base 16.

(2) Déterminer $g(q)$ et $g(r)$.

(3) Soient a et $b \in \mathbb{N}^*$. Comparer $g(ab)$ et $g(a)$ et $g(b)$.

(4) A-t-on $g(E) = g(q+r)$? Pourquoi ?

(5) Comment faut-il adapter l'algorithme de calcul de f pour calculer g ?

(6) Peut-on généraliser la preuve par 9 ou par F à une base b quelconque ? Si oui, comment ?

Fin du sujet. À rendre au plus tard le 25 juin à 8h30 dans Travaux sur :
`https://chamilo.univ-grenoble-alpes.fr/courses/GBX3MT39/`