

CONTRÔLE CONTINU 1
le 22 octobre 2019

Les documents, téléphones portables ainsi que tous les autres dispositifs électroniques sont strictement interdits. Une calculatrice et une feuille recto-verso manuscrite sont autorisées. Toutes les réponses doivent être justifiées et la qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice n° 1

Soit n l'entier s'écrivant 125 en base 8 et m l'entier s'écrivant 1122 en base 8.

1. Donner n en base 2 puis en base 10.
2. Calculer $m - n$ en base 8 en utilisant l'algorithme "école primaire".
3. Comment voit-on sur un entier écrit en base 8 qu'il est divisible par 16 ?

Exercice n° 2

1. Déterminer u, v et $d = \text{pgcd}(a, b)$ tels que $au + bv = d$ pour $a = 47$ et $b = 14$.
2. Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers tels que $47x + 14y = 3$.
3. Résoudre le système suivant en $x \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{47} \\ x \equiv 3 \pmod{14} \end{cases}$$

Exercice n° 3

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer le pgcd de $3n + 1$ et de $3n + 4$.
2. Donner l'identité de Bézout pour $3n + 1$ et $3n + 4$.

Exercice n° 4

Soit a un entier.

Combien faut-il faire de multiplications pour calculer a^{2048} avec l'algorithme d'exponentiation rapide ?
Même question pour a^{2051} .

Exercice n° 5 Dans le pays A, on ne dispose que de pièces de valeurs 13 et de pièces de valeur 5.

1. Quelles sont les solutions de $13x + 5y = 47$ où x et y appartiennent à \mathbb{Z} ?
2. J'achète un produit qui a pour valeur 47. Puis-je le payer sans que l'on me rende la monnaie ?
3. Même question avec 49.
4. J'achète un produit qui a pour valeur 16. Puis-je le payer si on me rend la monnaie ?
5. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (x, y) d'entiers tels que $0 \leq x \leq 4$ et $n = 13x + 5y$.
6. Montrer que tout achat de produit de valeur plus grande que 48 peut être payé sans rendu de monnaie.
7. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
Ecrire un programme en langage naturel donnant le nombre de pièces de valeur a et de pièces de valeur b permettant si c'est possible de payer un produit de valeur n sans rendu de monnaie.
On supposera que l'on dispose d'une fonction donnant l'identité de Bézout de a et b .

Exercice n° 6

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 1823^{242} par 18. La méthode doit être explicitée.
2. Donner la liste des inversibles de $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
3. Résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, $5x = \bar{3}$.