Nous utiliserons Xcas qui est un logiciel de calcul formel, capable de faire du calcul littéral mais aussi du calcul numérique exact et approché en simple ou en multi-précision ou avec de l'arithmétique d'intervalles, alors que la plupart des logiciels de calcul scientifique font du calcul numérique approché en simple précision.

Pour utiliser Xcas sur votre ordinateur personnel, vous pouvez soit ouvrir un navigateur compatible (Firefox de préférence) :
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/xcasfr.html`
soit l'installer en suivant les instructions ici :
`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/install_fr.html`
Lors de la première utilisation, choisissez `Xcas` lorsqu'on vous demande de choisir une syntaxe (sauf si vous connaissez le langage Maple). Vous pouvez ensuite cliquer sur Oui pour faire apparaitre le tutoriel dans le navigateur, ou le retrouver depuis le menu Aide, Debuter en calcul formel.

Si le tutoriel n'est pas chargé dans le navigateur, vous pouvez l'ouvrir depuis le menu Aide, Debuter en calcul formel. Suivez les instructions données dans la section Pour commencer et la section Les objets du calcul formel. Ensuite vous pouvez continuer la lecture du tutoriel ou passer aux exercices du TP, en revenant au tutoriel ou en consultant le menu Outils, le menu Cmds, ou l'aide de Xcas pour trouver les bonnes commandes. Si vous devez ré-utiliser un résultat, donnez-lui un nom de variable (par exemple `a:=...`). Pour libérer une variable de son contenu, utiliser `purge()`.

1. Écrire le polynôme $(x+3)^7 \times (x-5)^6$ selon les puissances décroissantes de x.
2. Simplifier les expressions suivantes :
$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \quad \frac{1+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}, \quad e^{i\pi/6}, \quad 4\text{atan}(\frac{1}{5}) - \text{atan}(\frac{1}{239})$$
3. Factoriser :
$$x^4+x^3-2x^2-3x-3, \quad x^6-2x^3+1, \quad (-y+x)z^2-xy^2+x^2y$$
4. Déterminer la valeur exacte et approchée de :
$$\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^3}, \quad \int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\,dx \quad \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$
5. Calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{k=1}^{N} k, \quad \sum_{k=1}^{N} k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$
6. Calculer le développement de Taylor en $x=0$ à l'ordre 4 de :
$$\ln(1+x+x^2), \quad \frac{\exp(\sin(x))-1}{x+x^2}, \quad \sqrt{1+e^x}, \quad \frac{\ln(1+x)}{\exp(x)-\sin(x)}$$
Représenter sur une même figure le graphe de l'une de ces fonctions et de son développement de Taylor.
7. Déterminer le plus grand réel positif x de la forme 2^{-n} (n entier) tel que $(1.0+x)-1.0$ renvoie 0 sur PC avec la précision par défaut puis avec `Digits:=30` (modifiez auparavant `epsilon` à 0 dans la configuration du CAS).

8. Calculer la valeur de $a := \exp(\pi\sqrt{163})$ avec 30 chiffres significatifs, puis sa partie fractionnaire. Proposez une commande permettant de décider si a est un entier, on pourra utiliser l'arithmétique d'intervalles.
9. Déterminer la valeur et le signe de la fraction rationnelle

$$F(x,y) = \frac{1335}{4}y^6 + x^2(11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2) + \frac{11}{2}y^8 + \frac{x}{2y}$$

   en $x = 77617$ et $y = 33096$ en faisant deux calculs, l'un en mode approché et l'autre en mode exact. Que pensez-vous de ces résultats ? Combien de chiffres significatifs faut-il pour obtenir un résultat raisonnable en mode approché ?
10. Résoudre le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ ax & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

   Discuter selon les valeurs de a.
11. Déterminer l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Diagonaliser la matrice A.
12. Créez une matrice A de taille n dont le coefficient est $a_{i,j} = 1/(i+j)$. Même question pour la matrice dont les coefficients sont $1/(i+j)$ si $|i-j| \leq 1$ et 0 sinon.
13. Voici un programme qui calcule la base utilisée pour représenter les flottants.

```
Base():={
  local A,B;
  A:=1.0; B:=1.0;
  while (evalf(evalf(A+1.0)-A)-1.0=0.0) { A:=2*A;};
  while (evalf(evalf(A+B)-A)-B<>0) { B:=B+1;}
  return B;
} :;
```

   Testez-le et expliquez.