Examen du 23/05 2018, de 9h à 12h.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables déconnectés du réseau autorisés.
Barême donné à titre indicatif et non contractuel.

---

1. Système à paramètre *(6 points)*

Soit à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer une décomposition LU de la matrice du système.
Déterminer la solution du système en utilisant cette décomposition LU lorsqu'elle existe.

(2) A quelle condition la méthode de Cholesky est-elle applicable ?

(3) On suppose cette condition remplie. Ecrire la factorisation de Cholesky de A.

---

2. Équation différentielle, stabilité - convergence *(4 points)*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. On cherche à résoudre, pour η donné, l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) & \text{sur }]x_0, x_0 + a[, \\ y(x_0) = \eta. \end{cases}$$

où f est supposée continue et lipschitzienne par rapport à la variable y. On propose le schéma suivant :

$$\begin{cases} y_0 = \eta, \\ \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\right). \end{cases}$$

(1) Donner l'expression de la fonction Φ telle que : $y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$.

(2) Montrer que cette méthode est stable.

(3) En supposant que f est de classe C^1, montrer que cette méthode est au moins d'ordre 2.

---

3. Extrapolation, moindres carrés*(10 points)*

Soient $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0,1]$, deux-à-deux distincts. On note $\mathscr{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré n au plus, et on définit sur $\mathscr{P}_n$

$$< P|Q >= \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i)$$

Pour $m \leq n$, on fixe $m+1$ points distincts $y_0, y_1, \ldots, y_m$ parmi $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.
Soit $f \in \mathscr{C}^0[0,1]$. On note $P_{f,m}$ le polynôme de Lagrange interpolant f aux points $\{y_i\}_{i=0\ldots m}$ et $P_{f,n}$ le polynôme de Lagrange interpolant f aux points $\{x_i\}_{i=0\ldots n}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $m+k \leq n$. On cherche $Q \in \mathscr{P}_{m+k}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq m+k$, tel que :

$$Q(y_i) = f(y_i), \qquad \text{pour } 0 \leq i \leq m,$$

et minimisant la quantité

$$J(Q) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) - Q(x_i)\right)^2.$$

(1) Montrer que $< | >$ est un produit scalaire sur $\mathscr{P}_n$, on notera $\|\|$ la norme associée.

(2) Exprimer $J(Q)$ en fonction de $\|\|$ et de $P_{f,n}$

(3) Soit $V_0 = \{P \in \mathscr{P}_{m+k} : \quad P(y_i) = 0, \quad i = 0, \dots, m\}$. Montrer que V_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}_n$ et en donner une base.

(4) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in V_0$ réalisant

$$\min_{P \in V_0} \|P_{f,n} - P_{f,m} - P\|^2 = \|P_{f,n} - P_{f,m} - P_0\|^2$$

Exprimer le polynôme Q minimisant $J(Q)$ en fonction de P_0

(5) Montrer que les coordonnées $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ de P_0 dans une base de V_0 vérifient un système linéaire dont on donnera la matrice en fonction des x_i.

(6) Application, on pose $f(t) = 1/(1+t^2)$:

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-3			0			3
$f(x_i)$							

Déterminer un polynôme de degré 4, interpolant f aux points y_i, et l'approchant au mieux au sens des moindres carrés, aux points x_i.