CC du 1 avril 2016, de 9h à 11h.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables (netbooks) déconnectés du réseau autorisés.

Ce sujet comporte 2 pages. Barème donné à titre indicatif et non contractuel.

1. Erreurs en flottants et interpolation (7 pts)

Soit T_n le n-ième polynôme de Tchebyshev, défini par $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ sur $[-1,1]$, et $x_1,..,x_n$ les racines de T_n. On veut interpoler une fonction f en ces racines.

(1) Rappeler l'expression de x_k. Quelles sont les couples de racines les plus proches pour $n = 10$? Pour $n = 40$?

(2) Combien de chiffres significatifs faut-il s'attendre à perdre dans le cas le pire si on calcule $x_{k'} - x_k$ à partir d'une valeur approchée de x_k et $x_{k'}$?

(3) Déterminer une expression de $x_{k'} - x_k$ dont l'évaluation numérique n'entraîne pas une perte de précision relative aussi importante.

(4) On applique l'algorithme des différences divisées pour approcher une fonction f dont la valeur et sa dérivée sont de l'ordre de grandeur de 1 sur $[-1,1]$. Combien de chiffres significatifs faut-il s'attendre à perdre dans le calcul des premières différences divisées

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

selon qu'on utilise ou non la méthode d'évaluation de la question précédente ? On pourra prendre comme exemple type la fonction définie par $f(x) = \exp(x)$.

(5) Rappeler la majoration de l'erreur d'interpolation de f sur $[-1,1]$ en $x_1,..,x_n$. Pour quelle valeur de n a-t-on une erreur théorique plus petite que `1e-12` pour la fonction exponentielle ?

(6) Dans le cas de l'interpolation de la fonction exponentielle avec une précision de 12 chiffres, vous semble-t-il important de programmer un algorithme des différences divisées specifique à l'interpolation en les racines du polynôme de Tchebyshev utilisant la question (3) ?

2. Fonction périodique et formule des trapèzes. (4 pts)

Soit $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.

(1) Calculer $I(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$.

(2) Montrer que la valeur obtenue en approchant $I(f)$ par la méthode des trapèzes pour N subdivisions (pas de $h = 2\pi/N$) est

$$T_N(f) = h \sum_{j=0}^{n-1} f(jh).$$

En déduire que pour $N > m$, alors $I = T_N(f)$.

(3) Si f est périodique et de classe C^j avec $j \geq 2$, que peut-on dire de la décroissance de ses coefficients de Fourier ? En déduire que la méthode des trapèzes approche $I(f)$ avec une erreur en $O(N^{-j})$.

3. Calculs de polynômes caractéristiques (9 pts)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et χ_M son polynôme caractéristique.

(1) Méthode de Lagrange.

(a) Décrire brièvement une méthode efficace permettant de calculer le déterminant de M. Donner sa complexité asymptotique quand n tend vers l'infini.

(b) Expliquer comment obtenir χ_M connaissant $\det(kI_n - M)$ pour $k \in \{0; \ldots; n\}$. Donner la complexité asymptotique de la méthode.

(c) Faire un essai de cette méthode pour $n = 20$ avec une matrice à coefficients répartis aléatoirement uniformément dans l'intervalle $[0;1]$. Que peut-on dire de la stabilité de cette méthode (on pourra commenter le coefficient dominant du polynôme d'interpolation obtenu) ?

(2) On dira qu'une matrice M est sous forme de Hessenberg, si elle a des 0 en-dessous de la sous-diagonale : $i > j+1 \Rightarrow H_{i,j} = 0$. Ainsi une matrice de taille 3 est de Hessenberg si son coefficient dernière ligne, première colonne est nul, par exemple :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 9 & 7 & 3 \\ 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice de Hessenberg de taille 3 en développant $\det(\lambda I - H)$ par rapport à la dernière ligne.

(b) Montrer par récurrence que le polynôme caractéristique $h_n(\lambda) = \det(\lambda I - H)$ de

$$H = \begin{pmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & \ldots & H_{1,n-2} & H_{1,n-1} & H_{1,n} \\ H_{2,1} & H_{2,2} & \ldots & H_{2,n-2} & H_{2,n-1} & H_{2,n} \\ 0 & H_{3,2} & \ldots & H_{3,n-2} & H_{3,n-1} & H_{3,n} \\ 0 & 0 & \ldots & H_{4,n-2} & H_{4,n-1} & H_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & H_{n,n-1} & H_{n,n} \end{pmatrix}$$

vérifie

$$\begin{aligned} h_n(\lambda) &= (\lambda - H_{n,n})h_{n-1}(\lambda) - H_{n,n-1}H_{n-1,n}h_{n-2}(\lambda) + \\ &\quad -H_{n,n-1}H_{n-1,n-2}H_{n-2,n}h_{n-3}(\lambda) - \ldots \end{aligned}$$

(3) On va montrer qu'on peut se ramener à la forme de Hessenberg en conjuguant par des matrice élémentaires de rotations (matrices de Givens).

(a) Soit M une matrice de taille 3, on pose

$$a = M_{2,1}, b = M_{3,1}, c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a/c & b/c \\ 0 & -b/c & a/c \end{pmatrix}$$

Vérifier que RMR^t est une matrice de Hessenberg. Montrer que M et RMR^t ont le même polynôme caractéristique.

(b) Généraliser pour une matrice de taille n pour annuler les coefficients de la première colonne à partir de la ligne 3 (en utilisant les coefficients lignes 2 et $k > 2$ en colonne 1).

(c) Généraliser aux colonnes 2 à $n-2$ pour déterminer une matrice de Hessenberg semblable à M.

(d) Donner un équivalent du nombre d'opérations nécessaires pour calculer le polynôme caractéristique de M en passant par sa forme d'Hessenberg lorsque n est grand et comparer avec la méthode d'interpolation du (1).

(e) Que peut-on dire de la stabilité numérique de la réduction sous forme de Hessenberg par des rotations ? Comparer avec la méthode d'interpolation.