Examen du 17 juin 2015, de 9h à 12h.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables déconnectés du réseau autorisés. Ce sujet comporte 2 pages. Barême donné à titre indicatif et non contractuel.

1. Méthode LU et méthode de Jacobi. (12 points)

Dans tout l'exercice, on numérote les lignes et colonnes de matrices à partir de 0.

Soit I la matrice carrée de taille n, σ une application des entiers de 0 à $n-1$ dans lui-même n'ayant pas de point fixe ($\forall i \in [0,n-1], \sigma(i) \neq i$), S_σ la matrice dont la i-ième ligne ne contient que des 0 sauf un 1 à la colonne $\sigma(i)$. Pour ε un réel élément de $]0,1/2[$, on définit $A = \varepsilon S_\sigma + (1-\varepsilon)I$.

Par exemple pour $n=3$ et $\sigma(0)=2, \sigma(1)=0, \sigma(2)=0$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

On veut comparer la méthode LU et la méthode de Jacobi pour résoudre le système linéaire $Ax=b$

(1) On pose $\varepsilon = 1/10$ et $b = (1/2, 1/4, 1/4)$. Effectuer la décomposition LU de A puis déterminer la solution exacte du système en utilisant la décomposition LU précdente (on indiquera les étapes intermédiaires des deux calculs).

(2) Déterminer une suite récurrente qui converge vers la solution du système $Ax=b$ en appliquant la méthode de Jacobi.

(3) Calculer la dixième itération pour $\varepsilon = 0.1$ et $b = (.5, .25, .25)$.

(4) A quelle vitesse la suite semble-t-elle converger ?

(5) Dans la suite, on ne suppose plus que $n=3$. Pour quelle raison la méthode de Jacobi converge-t-elle ?

(6) Estimer la vitesse de convergence en fonction de ε.

(7) Quel est en fonction de n le coût d'une itération de la méthode de Jacobi pour A ayant la forme particulière de cet exercice ?

(8) Estimer en fonction de n le cout pour obtenir la solution de $Ax=b$ avec une précision donnée.

(9) Quel est le cout en fonction de n de la résolution par la méthode LU ? Quelle méthode est la moins couteuse lorsque n est grand ?

2. Équation différentielle (8 points)

Pour résoudre de manière approchée une équation (ou un système différentiel) $y' = f(t,y)$ avec f de classe C^2, on va appliquer la méthode explicitée ci-dessous, appelée méthode de Heun de pas constant h. Soit $y_0 = y(t_0)$ la condition initiale, $t_n = t_0 + nh$, on approche $y(t_n)$ par la suite récurrente y_n définie par :

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n,y_n) + f(t_n+h, \tilde{y}_{n+1}))$$

(1) On suppose que $f(t,y)$ ne dépend pas de y, quelle est la méthode numérique d'intégration correspondante ? En déduire une majoration de l'erreur locale $|y_1 - y(t_0+h)|$ en fonction de h dans ce cas.

(2) On admet que l'erreur locale est encore du même ordre en puissance de h lorsque $f(t,y)$ dépend de y. On pose $y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h))$, donner l'expression de Φ en fonction de f, justifier que Φ est lipschitzienne par rapport à y, et en déduire une majoration de l'erreur globale $|y_n - y(t_n)|$.

(3) On suppose dans la suite que $f(t,y) = y$ et que $h \leq 0.1$. Calculer une constante de Lispchitz pour Φ.

(4) Programmer la méthode. Déterminer une valeur approchée de $y(1)$ obtenue par cette méthode pour l'équation $y' = y, y(0) = 1$ avec $h = 0.1, 0.01, 0.001$. Comparer avec la valeur exacte de $y(1)$, observe-t-on le comportement attendu en puissance de h ?

(5) Déterminer de même une valeur approchée y_N de $y(t_N)$ pour $t_N = 4$ et $h = 0.1, 0.01, 0.001$ (donc $N = 40, 400, 4000$), calculer l'erreur en utilisant la valeur exacte de $y(t_N)$, observe-t-on le comportement attendu en fonction de t_N ?