Examen du 20 mai 2014, de 13h30 à 16h30.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables déconnectés du réseau autorisés. Ce sujet comporte 2 pages. Barème donné à titre indicatif et non contractuel.

1. Précision (3 points)

On travaille en arithmétique flottante avec 14 chiffres significatifs. On s'intéresse au calcul des solutions de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ à coefficients réels, en particulier lorsque b^2 est grand devant $|ac|$, par exemple pour $x^2+12345678x+1.0=0$.

(1) Donner une valeur approchée des deux solutions de l'exemple en appliquant la formule habituelle $r_\pm = (-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/(2a)$ et discuter leur erreur relative.

(2) Comparer l'erreur relative pour la solution la moins précise avec l'erreur relative de la valeur approchée obtenue en appliquant la formule $r_+r_- = c/a$.

(3) Écrire une fonction prenant a,b,c en arguments et renvoyant deux solutions précises de l'équation (on distinguera deux cas en fonction du signe de b).

2. Méthode de la puissance (7 points)

On souhaite déterminer la racine l de plus grand module d'un polynôme P. Pour cela on applique la méthode de la puissance à la matrice companion de P, matrice M dont le polynôme caractéristique est P (commande `companion()` en Xcas).

(1) Par exemple pour $P(x)=x^3+3x^2+7x+121$, on a $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -121\\ 1 & 0 & -7\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$.
Prendre un vecteur aléatoire v à coordonnées dans l'intervalle $[0,1]$, lui appliquer 29 et 30 fois la matrice, en déduire une estimation λ de la racine l de P qui est la plus grande en module.

(2) Soit A une matrice symétrique réelle de taille n. On suppose qu'on a déterminé (par la méthode de la puissance) un vecteur normé v tel que $\|(Av-\lambda v\| < \varepsilon$. Soit $(v_1,...,v_n)$ les coordonnées de v dans une base propre orthonormale de A associée aux valeurs propres $(\lambda_1,...,\lambda_n)$. Calculer $\|Av-\lambda v\|$, en déduire que l'une des valeurs propres au moins vérifie $|\lambda_k-\lambda|<\varepsilon$.

(3) Peut-on appliquer le résultat du (2) à M pour déterminer un encadrement de l ?
P est un polynôme, on peut donc en calculant le signe de $P(\lambda-\delta)$ et $P(\lambda+\delta)$ montrer que P admet une racine dans $[\lambda-\delta,\lambda+\delta]$. Appliquer une méthode de dichotomie pour donner un encadrement certifié de la racine correspondante de P à 10^{-8} près. Proposer une autre méthode qui permettrait d'accélérer la convergence vers cette racine.

(4) Le polynôme pourrait avoir un couple (l_+,l_-) de racines complexes conjuguées de module maximal (c'est-à-dire, les autres racines r_i de P vérifient $|r_i|<|l_+|=|l_-|$). C'est le cas par exemple pour $Q(x)=x^3+4x+116$. On notera N la matrice companion de Q. Proposer une modification de la matrice N (avec un shift complexe) permettant de déterminer une estimation d'une des racines de ce couple par la méthode de la puissance et l'appliquer (Remarque : on ne peut plus utiliser d'arguments de signe pour certifier un encadrement d'une racine complexe de Q, mais on peut montrer l'existence d'une racine dans un disque du plan complexe de rayon $|Q/Q'(\lambda))|\times\text{degre}(Q)$).

3. Méthode des trapèzes et polynômes trigonométriques (6 points)

Étant donné une fonction continue $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, on note $I(f)=\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$ son intégrale sur $[0,2\pi]$ et $\mathrm{Trap}_N(f)$ la valeur approchée de $I(f)$ par la méthode des trapèzes avec un pas constant $h=2\pi/N$, où $N>0$ est un entier.

(1) Soit f un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à $N-1$, de la forme

$$f(x) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

avec $c_k \in \mathbb{C}$, $c_{-k} = \overline{c}_k$, $k = -N+1, \ldots, N-1$. Montrer que $\mathrm{Trap}_N(f)$ donne le résultat exact pour l'intégrale $I(f)$.

(2) On considère la fonction $g(x) = \exp(\sin x)$. En utilisant la question 1 et le développement de l'exponentielle en 0, montrer que l'erreur $E(g) = |I(g) - \mathrm{Trap}_N(g)|$ est majorée par $c/N!$, où c est une constante que vous déterminerez.

(3) Déterminez à l'aide de Xcas l'augmentation de la précision avec h quand on divise h par deux (vous pourrez par exemple utiliser votre programme pour la méthode des trapèzes réalisé en TP). Comparez cette précision avec celles obtenues par les méthodes des rectangles à gauche et à droite. Pouvez-vous expliquer les similitudes/différences des résultats obtenus par ces trois méthodes ?

4. Ordres des méthodes de Runge-Kutta (5 points)

On considère une méthode de Runge-Kutta pour résoudre l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t), t)$ sur l'intervalle $[0,1]$, donnée par le tableau de coefficients

$$\begin{array}{c|cccccc}
c_0 = 0 & 0 & & & & \\
c_1 & \lambda_{10} & 0 & & & \\
c_2 & \lambda_{20} & \lambda_{21} & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
c_q & \lambda_{q0} & \lambda_{q1} & \cdots & \lambda_{qq-1} & 0 \\
\hline
1 & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{q-1} & \mu_q
\end{array}$$

On a donc $z_{n+1} = z_n + h\Phi(z_n, t_n, h)$ où h est le pas (supposé constant), $z_0 = y(0)$, $t_n = nh$ et

$$\Phi(z,t,h) = \sum_{i=0}^{q} \mu_i f(z_{n,i}, t + hc_i)$$

avec

$$z_{n,0} = z \ \text{ et } \ z_{n,i} = z + h \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_{ij} f(z_{n,j}, t + hc_j) \ , \ i = 1, \ldots, q \ .$$

On note p l'ordre de la méthode. On rappelle que $p > 0$.

(1) Supposons que $f(y,t) = f(t)$ soit indépendante de y. On calcule l'intégrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ en résolvant l'équation différentielle ci-dessus avec la condition initiale $y(0) = 0$ par la méthode de Runge Kutta RK4. Cela correspond-t-il à une méthode d'intégration numérique connue, si oui laquelle ? Vous justifierez votre réponse.

(2) En utilisant un résultat général du cours sur l'ordre des méthodes à un pas, appliqué à une fonction $f(y,t) = f(t)$ indépendante de y, montrer que pour q quelconque l'on a

$$\sum_{i=0}^{q} \mu_i c_i^l = \frac{1}{l+1} \quad \text{pour} \quad l = 0, \ldots, p-1 \ .$$

(3) En déduire que la méthode d'intégration numérique

$$\int_0^1 g(u)\mathrm{d}u \simeq \sum_{i=0}^{q} \mu_i g(c_i)$$

est d'ordre au moins $p-1$.

(4) On rappelle qu'une méthode d'intégration numérique élémentaire à m points d'interpolation est toujours d'ordre strictement inférieur à $2m$ (voir l'exercice 2 de la feuille 7 de TD/TP). En déduire une majoration de p en fonction de q.