Examen du 01 juin 2006, de 10h à 12h.

Documents et calculatrices autorisés. Les trois exercices sont indépendants.

1. Nombres approchés et arctangente

Soit x un réel tel que $|x| \leq 2^{-26}$. Sur un ordinateur représentant les nombres approchés avec une précision relative de 2^{-53} (en base 2), par quoi est représenté $1 - x^2/3$? $x - x^3/3$? Un programme de calcul de $\arctan(x)$ sur cet ordinateur teste si $|x| \leq 2^{-26}$ et dans ce cas il renvoie x, cela vous parait-il correct ? (justifier votre réponse).

2. Lagrange et Taylor

On souhaite approcher la fonction $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0,2]$ par un polynôme de degré 2, en choisissant entre le développement de Taylor T_2 de f à l'ordre 2 en $x = 0$ et le polynome de Lagrange L_2 de degré 2 dont le graphe passe par les points d'abscisses $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$. Donner la valeur de $T_2(x)$. Montrer que

$$L_2(x) = 1 + (e-1)x + \frac{e^2 - 2e + 1}{2} x(x-1)$$

En observant les 3 graphes sur votre calculatrice sur l'intervalle $[0,2]$, lequel de T_2 et L_2 vous parait-il le plus approprié pour approcher f ? Donner une majoration de $|f - T_2|$ et de $|f - L_2|$ et justifiez les observations précédentes.

3. Méthode de Newton

Dans cet exercice on considère la fonction

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 3x^3 - 10x^2 - 4x + 8.$$

3.1. Déterminer trois entiers k tels que $f(k)$ et $f(k+1)$ ne sont pas de même signe. (Vous pouvez utiliser la calculatrice pour déterminer la valeur de $f(k)$, vous pouvez aussi représenter le graphe de f sur la calculatrice pour trouver des valeurs de k pertinentes.) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles distinctes, que l'on notera $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a < b < c$, et encadrer chacune de ces solutions par un intervalle $]k, k+1[$ avec k entier.

3.2. On veut appliquer la méthode de Newton pour approcher les racines a, b, c avec plus de précision.

(a) Sur quels intervalles la fonction f est-elle croissante/décroissante ?
Sur quels intervalles est-elle concave/convexe ?

(b) Déterminer une valeur initiale entière $u_0 \in \mathbb{Z}$ pour laquelle vous pouvez garantir que la méthode de Newton donne une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers la racine c. Justifiez votre choix.

(c) Même question pour les deux autres racines a et b.

3.3. (a) Calculer des valeurs approchées $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ des trois racines a, b, c par la méthode de Newton, comme préparée ci-dessus, en effectuant pour chacune des 3 suites 3 itérations.

(b) Donner une majoration de l'écart $|c - \hat{c}|$.

(c) Vérifier vos approximations en développant $3(x-\hat{a})(x-\hat{b})(x-\hat{c})$. Obtient-on $f(x)$ exactement ?

3.4. Exhiber une valeur initiale u_0 pour laquelle la méthode de Newton donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne converge pas. Pourquoi ceci ne met pas en cause le théorème du cours garantissant la convergence ?