Mathématique assistées par ordinateur

Examen du 21 juin 2006, 16h15-19h15.

Documents et calculatrices autorisés.

Ce sujet comporte 2 pages, les quatre exercices sont indépendants.

1. Développement binaire

Écrire le rationnel un tiers (dont l'ecriture en base 10 est 0.3333...) comme un nombre à virgule en base 2 (obtenu par division de 1 par 3 en base 2). Quelle est la période du développement obtenu ?

2. Calcul exact et calcul approché

Comparer les valeurs de

$$\sqrt{10^{11}+1}-\sqrt{10^{11}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{10^{11}+1}+\sqrt{10^{11}}},$$

en calcul exact et en calcul approché. En calcul approché, laquelle de ces deux valeurs vous parait-elle plus proche de la valeur exacte correspondante ? Justifier rapidement.

3. Théorème du point fixe et Newton

(1) Montrer que la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x)=\frac{\exp(-x)}{2}$$

vérifie les hypothèses du théorème du point fixe, et calculer la constante k de contraction.

(2) Calculer les 5 premiers termes d'une suite $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $u_0 \in I$. Déterminer un encadrement à 10^{-2} près de la solution l de l'équation $f(x)=x$ sur cet intervalle (on justifiera la précision de cette approximation).

(3) Donner la formule de récurrence $v_{n+1}=g(v_n)$ permettant de résoudre l'équation $f(x)=x$ par la méthode de Newton.

(4) Montrer que la fonction $F(x)=f(x)-x$ est convexe sur $[0,1]$. Quel est le signe de F' sur $[0,1]$?

(5) En déduire une valeur initiale v_0 pour laquelle la suite (v_n) croit et converge vers la même limite l que la suite (u_n) (on justifiera).

(6) Calculer les 3 premiers termes de (v_n) pour cette valeur de v_0.

(7) Donner une majoration de l'erreur $|l-v_3|$.

4. Séries entières et applications

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0, \quad f(0) = 1$$

et soit F la primitive de f qui s'annule en 0 :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Dans cet exercice, on veut calculer une valeur approchée de $F(x)$.

(1) Donner le développement en séries entières de f.

(2) En déduire celui de F.

(3) Soit $T_n(x)$ le développement de Taylor de F en $x = 0$ à l'ordre n et $R_n(x)$ le reste. Donner une majoration de $|R_n(x)|$ en fonction de n et de x pour $|x| \leq 3$.

(4) Déterminer une valeur de n telle que $|R_n(1)| < 10^{-7}$.

(5) En déduire une valeur approchée de $F(1)$ à 10^{-7} près.

(6) Montrer que pour cette valeur de n, $T_n(x)$ est une valeur approchée à 10^{-7} près de $F(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Est-ce toujours le cas pour $x = 3$?