Examen du 20 juin 2007, de 07h30 à 10h30.

Documents et calculatrices autorisés.

Ce sujet comporte 2 exercices indépendants.

Les calculatrices empruntées devront être rendues en B118 à l'issue de l'examen.

1. Arithmétique.

Déterminer le terme de degré n ($n \in \mathbb{N}$) du développement de Taylor en $x = 0$ de

$$f(x) = \frac{1}{2x^2 - 5x + 2}$$

2. Intégrale gaussienne.

Le but de ce problème est la résolution numérique de l'équation en x :

$$\int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt = \alpha$$

où exp désigne la fonction exponentielle et où $\alpha > 0$ est donné.

2.1. **Calcul approché de l'intégrale.** On pose pour $x \geq 0$:

$$F(x) = \int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt$$

On suppose dans cette partie que $x \in [0, 5/2]$, on pose

$$f(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$$

(1) Calculer la dérivée 4-ième $f^{[4]}$ et 5-ième $f^{[5]}$ de f.

(2) Montrer que $f^{[5]}(x) = xQ(x^2)\exp(-x^2/2)$ où Q est un polynôme de degré 2. En déduire que $\sqrt{5 - \sqrt{10}}$ est l'unique racine de la dérivée 5-ième de f sur $[0, 5/2]$.

(3) Donner le tableau de variations de la dérivée 4-ième de f. En déduire le maximum en valeur absolue de la dérivée 4-ième de f sur $[0, 5/2]$

(4) On souhaite avoir une valeur approchée de $F(2)$ à `2e-4` prés par la méthode de Simpson. Combien de subdivisions de $[0, 2]$ faut-il prendre ?

(5) Calculer la valeur approchée de $F(2)$ par la méthode de Simpson avec ce nombre de subdivisions.

2.2. **Résolution de l'équation.**

(1) Exprimer F', la dérivée de F, en fonction de f, puis calculer sa dérivée seconde F''. Quels sont les signes de $F'(x)$ et $F''(x)$ pour $x \geq 0$?

(2) En déduire que l'équation $F(r) = \alpha$ admet une solution unique $r \geq 0$ lorsque $\alpha < \lim_{x\to+\infty} F(x)$ (on admettra que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sqrt{\pi/2}$).

(3) On souhaite calculer une valeur approchée de $r > 0$ solution de $F(r) = \alpha$ avec $\alpha = 0.96 * \sqrt{\pi/2}$. En utilisant la partie précédente, montrer que $r > 2$.

(4) Montrer que la suite (u_n) de la méthode de Newton avec comme valeur initiale $u_0 = 2$ converge vers r.

(5) Calculer u_1.

(6) Donner une valeur approchée de $F(u_1)$ en appliquant la méthode de Simpson sur 4 subdivisions.

(7) En déduire un encadrement de r.