

*Documents et calculatrices autorisés.
Les exercices 1 et 2 sont indépendants.*

Exercice 1

On considère le polynôme à coefficients approchés :

$$P(x) = (x - 1.234)(x - 2.99999)(x - 3.00001)$$

On cherche à déterminer la vitesse de convergence de la méthode de Newton appliquée à la recherche des racines de P . Soit Q la forme développée de P .

1. Quelles sont les racines de P ?
2. Déterminez Q . Donnez la formule de récurrence

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{1}$$

obtenue lorsqu'on applique la méthode de Newton pour calculer une racine de P .

3. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction P est-elle convexe? concave? (Vous pouvez tracer le graphe de P pour vérifier)
4. Montrez que la suite définie par (1) et $x_0 < 1.234$ converge et déterminez sa limite. Calculez les 5 premiers termes de la suite pour $x_0 = 1.0$.
5. Montrez que la suite définie par (1) et $x_0 > 3.00001$ converge et déterminez sa limite. Calculez les 10 premiers termes de la suite pour $x_0 = 3.2$.
6. Que constatez-vous pour les vitesses de convergence de ces 2 suites ($x_0 = 1.0$ et $x_0 = 3.2$) ?
7. Calculez la valeur de la dérivée de P en 1.234 et 3.00001. Quelle relation peut-il y avoir avec l'observation de la question précédente ?
8. Soit R le polynôme obtenu à partir de P en arrondissant les coefficients à l'entier le plus proche. Quelles sont les racines de R et leur multiplicité ? Pour quelles racines de R la méthode de Newton s'applique-t-elle ?
9. Soit S un polynôme à coefficients entiers. Comment peut-on déterminer si les racines de S sont de multiplicité 1 sans les calculer ?

Exercice 2

Soit la matrice à coefficients exacts :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit $v = (1, 0, 0)$. Calculer Av , A^2v , A^3v puis déterminer les relations linéaires existant entre v , Av , A^2v et A^3v . En déduire le polynôme caractéristique P de A .
2. En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton ($P(A) = 0$), montrer que :

$$A(A^2 - 2A - 10I) = -22I$$

où I désigne la matrice identité de taille 3.

3. En déduire que A est inversible et exprimer l'inverse de A en fonction de I , A et A^2 puis calculez sa valeur.
4. Que pensez-vous de cette méthode de calcul de l'inverse d'une matrice par rapport à la méthode du pivot de Gauss ?