Examen du 21 mai 2010, de 8h à 11h.
Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables (netbooks) autorisés.
Ce sujet comporte 2 pages.
Les netbooks empruntés devront être rendus en B118 à l'issue de l'examen.

1. Exercice

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -48 & -70 & 86 & -114 \\ -70 & 144 & 54 & 107 \\ 86 & 54 & 8 & 82 \\ -114 & 107 & 82 & 192 \end{pmatrix}$$

Soit v_0 un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^4$, et la suite de vecteurs définie par récurrence par

$$v_{n+1} = Av_n$$

Calculer une valeur approchée de $v_n/||v_n||$ pour $n = 20$, en déduire une valeur approchée de la plus grande valeur propre en valeur absolue de A.

2. Problème

Le but de ce problème est de calculer pour x donné une approximation de l'intégrale définie par :

$$(E) \qquad F(x) = \int_0^x \exp(t - t^2)\, dt$$

où exp désigne la fonction exponentielle et de résoudre l'équation $F(x) = \alpha$ pour $\alpha \geq 0$. On notera :

$$f(t) = \exp(t - t^2)$$

Les trois parties sont indépendantes, sauf la dernière question de la troisième partie.

2.1. **Méthode de Newton.** Dans cette partie, on suppose qu'on dispose d'un logiciel de calcul capable de déterminer une valeur approchée de $F(x)$, par exemple avec Xcas :

```
F(x):=int(exp(t-t^2),t=0..x);
F(0.5); evalf(limit(F(x),x=+infinity));
```

(1) Quel est le signe de $F'(x)$ pour $x \geq 0$? Déterminer le nombre de solutions de $F(x) = 1$. Même question pour $F(x) = \alpha$ pour $\alpha \geq 0$ (on pourra comparer α et $F_\infty = \int_0^{+\infty} \exp(t - t^2)\, dt$, on admettra que F_∞ a bien un sens).

(2) Étudier le signe de F'' pour $x \geq 0$.

(3) Rappeler l'expression de la suite récurrente (u_n) de la méthode de Newton pour résoudre $F(x) - \alpha = 0$.

(4) Déterminer une valeur initiale u_0 pour laquelle on peut affirmer que la suite précédente converge vers une solution r de $F(x) = 1$. Montrer qu'il existe $\theta \in [u_n, r]$ tel que

$$(u_n - r) = \frac{F(u_n) - F(r)}{F'(\theta)}$$

en déduire une majoration de $|u_n - r|$ en fonction de $1 - F(u_n)$ et $F'(r)$. Donner une valeur approchée de la solution de $F(x) = 1$ à $1e-8$ près (on indiquera l'indice n utilisé, la valeur de u_n correspondante et une justification que l'erreur commise est inférieure à $1e-8$).

(5) Déterminer en fonction de α ($0 \leq \alpha < F_\infty$), une valeur initiale u_0 pour laquelle on peut affirmer que la suite précédente converge vers une solution de $F(x) = \alpha$.

2.2. **Valeur approchée de $F(x)$ par intégration numérique.**

(1) Rappeler la valeur de F' en fonction de f.

(2) Calculer la dérivée seconde et troisième de f. En déduire la valeur du maximum de $|f''(t)|$ pour $t \geq 0$, que l'on notera M_2.

(3) Déterminer le nombre N de subdivisions qui assure que la méthode du point milieu donne une valeur approchée de $F(\frac{1}{2})$ à $1e-4$ près et à $1e-8$ près ? Calculer une valeur approchée de $F(\frac{1}{2})$ à $1e-4$ près.

(4) Déterminer le nombre N de subdivisions qui assure que la méthode du point milieu donne une valeur approchée de $F(x)$ à $1e-8$ près, on exprimera N en fonction de x.

(5) Calculer la dérivée quatrième et cinquième de f. En déduire la valeur du maximum de $|f^{[4]}(t)|$ pour $t \geq 0$, que l'on notera M_4.

(6) Déterminer le nombre N de subdivisions qui assure que la méthode de Simpson donne une valeur approchée de $F(\frac{1}{2})$ à $1e-4$ près et à $1e-8$ près ? Calculer une valeur approchée de $F(\frac{1}{2})$ à $1e-8$ près.

2.3. **Calcul approché de F par développement en séries.**

(1) On effectue le changement de variables $t = u + \frac{1}{2}$ dans l'intégrale définissant F. Déterminer l'expression correspondante de F en fonction de

$$G(x) = \int_0^x \exp(-u^2)\, du$$

(2) Déterminer le développement en séries de G en $x = 0$ à l'ordre $2N+1$, ainsi qu'une majoration du reste $|R_{2N+1}(x)|$ en fonction de N et de x.

(3) Pour quelle valeur de N peut-on assurer que $|R_N(\frac{1}{2})| \leq 0.3e-8$? Même question pour $R_N(-\frac{1}{2})$. En déduire une valeur approchée de $F(\frac{1}{2})$ à $1e-8$ prés. Même question pour une précision de $1e-12$.

(4) Déterminer une valeur de N telle que $|R_N(x)| \leq 0.3e-8$ pour tout $x \in [0,2]$.

(5) On reprend la méthode de Newton de la première partie pour résoudre l'équation $F(x) = 1$ mais pour calculer u_{n+1} en fonction de u_n on calcule une valeur approchée de F par l'une des méthodes des deuxième et troisième partie. Discuter la précision de la solution.