Examen du 16 mai 2007, de 12h30 à 15h30.
Documents et calculatrices autorisés.
Ce sujet comporte 2 pages, les deux exercices sont indépendants.
Les calculatrices empruntées devront être rendues en B118 à l'issue de l'examen.

1. Intégrale de Dawson

Le but de ce problème est de calculer pour x donné une approximation de l'intégrale dite de Dawson, définie par :

$$(E) \qquad D(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2)\, dt$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

Les deux parties proposent chacune une méthode de calcul et sont indépendantes.

1.1. **Par la méthode des séries entières.**

(1) Rappeler le développement de Taylor T_n à l'ordre n de $\exp(t)$ en $t = 0$, donner une majoration du reste R_n pour $t \geq 0$.

(2) En déduire que $\exp(t^2)$ est la somme d'un polynôme P_n en t de degré $2n$ et d'un reste que l'on précisera. En intégrant par rapport à t, montrer que

$$D(x) = \exp(-x^2)(Q_n(x) + S_n(x))$$

où Q_n est un polynôme de degré $2n+1$ et S_n un reste dont on déterminera un majorant en valeur absolue.

(3) On suppose maintenant que $x \in [-1,1]$. Trouver une valeur de n telle que $|S_n(x)| < \mathtt{1e} - \mathtt{5}$.

(4) Donner une valeur approchée de $D(x)$ avec une erreur absolue inférieure à `4e-6` pour $x \in [-1,1]$ (on justifiera). Faire l'application numérique pour $x = 1$.

1.2. **Par la méthode du point milieu ou de Simpson.**

On suppose dans cette partie que $x \in [0,1]$. On note :

$$f(t) = \exp(t^2)$$

(1) Calculer la dérivée seconde de f. Déterminer son maximum sur $[0,x]$ en fonction de x puis un majorant de ce maximum indépendant de x lorsque $x \in [0,1]$.

(2) On veut approcher l'intégrale de l'équation (E) pour $x = 1$ par la méthode du point milieu. Rappeler la formule donnant la valeur approchée de l'intégrale par la méthode du point milieu. On souhaite obtenir une approximation avec une erreur absolue inférieure à `0.1`. Déterminer le nombre N de subdivisions et le pas h de chaque subdivision qu'il faut prendre pour réaliser cette approximation.

(3) En déduire une valeur approchée de $D(1)$ avec une erreur absolue inférieure à `0.04` (on justifiera).

(4) Montrer qu'en conservant des subdivisions de pas inférieur ou égal à h, on obtient une valeur approchée de $D(x)$ avec une erreur absolue inférieure à `0.04` pour tout $x \in [0,1]$.

(5) Calculer la dérivée quatrième de f puis son maximum sur $[0,1]$. En déduire le nombre de subdivisions qu'il faut prendre pour trouver une valeur approchée de $D(x)$ par la méthode de Simpson avec une erreur absolue inférieure ou égale à `4e-6` pour tout $x \in [-1,1]$.

Parmi les méthodes proposées pour calculer $D(x)$ dans ces deux parties, quelle est celle qui vous parait le plus efficace ? (justifiez).

T.S.V.P.

2. Polynômes

Soit $f(x) = 1/(x+2) + x^3 - 1$ définie pour $x \in [0,2]$.

(1) Déterminer P_0 le polynôme d'interpolation de f au point d'abscisse 0, puis P_1 le polynôme d'interpolation de f en 0 et 1 en utilisant P_0, puis P_2 le polynôme d'interpolation de f en 0, 1 et 2 en utilisant P_1.

(2) Montrer que
$$u_0 = \frac{53 + \sqrt{6313}}{146}$$
est l'unique solution de $P_2(x) = 0$ comprise entre 0 et 2.

(3) Calculer f' et f''. Quel est le signe de f'' sur $[0,2]$? Montrer que f admet une racine unique r dans $[0,2]$.

(4) Déterminer le signe de $f(u_0)$ et de $f'(1/2)$. En déduire qu'on peut appliquer la méthode de Newton pour résoudre $f(x) = 0$ en utilisant u_0 comme valeur initiale de la suite récurrente (u_n) de la méthode de Newton.

(5) Calculer u_3, donner une majoration de $|u_3 - r|$.