Documents et calculatrices autorisés.
Les exercices 1 et 2 sont indépendants.
N.B. : Les calculatrices empruntées devront être rendues à la fin de l'examen ou lors de la consultation de copies (le 3 juin à 9h) en salle B118.

Exercice 1

Dans cet exercice, on détermine un polynôme d'interpolation de Lagrange en résolvant un système linéaire. Soit

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, \quad y_0 = 7, y_1 = 3, y_2 = -4, y_3 = 6, \quad P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Écrire le système linéaire équivalent aux 4 équations $P(x_i) = y_i, i = 0..3$.
Résoudre le système linéaire, en déduire P.

Exercice 2

On souhaite calculer une valeur approchée de :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt, \quad x \in [0,1]$$

par un développement en séries entières ou par la méthode de Simpson.

1. Développement en séries :
   Donner le développement en séries de e^t, en déduire celui de e^{-t^2}, puis de $F(x)$ en intégrant terme à terme. Montrer que la série obtenue est alternée (ne pas oublier de vérifier que le terme général décroit en valeur absolue vers 0). En déduire une valeur de k telle que la somme partielle jusque k de la série soit une valeur approchée de $F(1)$ à 10^{-4} près. Calculer cette valeur approchée.
2. Méthode de Simpson pour $x = 1$:
   Déterminer la valeur approchée de l'intégrale obtenue par la méthode de Simpson en subdivisant $[0, 1]$ en 1 puis en 10 intervalles (donner une réponse littérale sous forme de somme puis une valeur numérique).
3. On veut déterminer une majoration de l'erreur des valeurs approchées ci-dessus. Soit $S(h)$ la valeur approchée de l'intégrale obtenue par la méthode de Simpson avec un pas de h (ci-dessus $h = 1$ pour 1 intervalle et $h = 0.1$ pour 10 intervalles). On rappelle la majoration (pour $x = 1$) :
   $$|F(1) - S(h)| \leq \frac{1}{2880} |f^{[4]}(\xi)| h^4$$
   où $f^{[4]}$ désigne la dérivée quatrième de $f(t) = e^{-t^2}$ et $\xi \in [0, 1]$.
   Calculer les dérivées quatrièmes et cinquièmes de f, montrer qu'elles s'écrivent sous la forme $P(t^2)e^{-t^2}$ et $tQ(t^2)e^{-t^2}$ où P et Q sont des polynômes de degré 2 (montrer que $P(x) = 4(4x^2 - 12x + 3)$ et déterminer Q).
4. Déterminer les racines de Q. En déduire le signe de $f^{[5]}$.
5. Donner le tableau de variations de $f^{[4]}$ sur $[0, 1]$ puis une majoration de $|f^{[4]}(\xi)|$. En déduire une majoration de $|F(1) - S(h)|$ en fonction de h.
6. Donner une estimation de l'erreur des deux valeurs approchées $S(1)$ et $S(0.1)$. Pour quelle valeur de h a-t-on $|F(1) - S(h)| < 10^{-4}$?
7. Donner une valeur de h telle que la méthode de Simpson sur $[0, x]$ de pas h soit une valeur approchée de $F(x)$ à 10^{-4} près pour tout $x \in [0, 1]$. Même question pour une valeur approchée à 10^{-12} près.
8. Laquelle des deux méthodes vous parait la plus efficace pour trouver une valeur approchée de $F(x)$?