1 Exercice 1

1.1 Question 1

Comme $(2^{1/4})^4 = 2$, on peut prendre $P(X) = X^4 - 2$. La méthode de Newton appliquée à P définit la suite :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)} = u_n - \frac{u_n^4 - 2}{4u_n^3}$$

Comme $P'' \geq 0$, P est convexe, de plus $P'(2^{1/4}) > 0$, si on prend $u_0 > 2^{1/4}$, la suite (u_n) convergera vers $2^{1/4}$. On peut prendre $u_0 = 2$ car $2 > 2^{1/4}$.

Pour calculer u_4, on peut définir la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$,
sur HP `DEFINE(f(X)=X-(X^4-2)/(4*X^3))`
sur TI `Define f(x)=x-(x^4-2)/(4*x^3)`
puis on calcule `f(f(f(f(2.0)))) STO> U4`, on trouve 1.18945113368.

Pour déterminer un encadrement de $2^{1/4}$, on calcule $P(u_4) = 0.0016...$, et on applique le théorème des accroissements finis :

$$P(u_4) - P(2^{1/4}) = (u_4 - 2^{1/4})P'(\theta), \quad \theta \in [2^{1/4}, u_4]$$

on vérifie bien que $u_4 > 2^{1/4}$ (on savait que la suite est décroissante) et comme $P'(\theta) = 4\theta^3 > 4$,

$$0 \leq u_4 - 2^{1/4} \leq \frac{P(u_4) - P(2^1/4)}{P'(\theta)} \leq \frac{P(u_4)}{4} \approx 4e-4$$

On peut appliquer même méthode pour $x \geq 0$ quelconque, en prenant $P(X) = X^4 - (1+x)$ qui est convexe et vérifie encore $P'(y) = 4y^3 > 0$, la suite u_n est définie par :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)} = u_n - \frac{u_n^4 - (1+x)}{4u_n^3}$$

et on prend une valeur de u_0 plus grande que y par exemple $1 + x$.

1.2 Question 2

Développement de Taylor de $(1+x)^{1/4}$ en $x = 0$ à l'ordre n :

$$1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)\frac{x^2}{2!} + ... + \frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)...(\frac{1}{4}-n+1)\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)...(\frac{1}{4}-n)(1+\theta)^{1/4-n-1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec θ un réel dépendant de x compris entre 0 et x.

Le reste pour $n = 4$ est

$$R_4(x) = \frac{1}{4}\frac{-3}{4}\frac{-7}{4}\frac{-11}{4}\frac{-15}{4}(1+\theta)^{1/4-5}\frac{x^5}{5!} = \frac{3\ 7\ 11\ 15}{4^5\ 5!}(1+\theta)^{1/4-5}x^5 = \frac{231}{8192}x^5(1+\theta)^{1/4-5}$$

Pour $x = 1/2$, on majore $(1+\theta)^{1/4-5}$ par 1 (attention cette expression décroit quand θ augmente, la valeur maximale est atteinte pour $\theta = 0$) et on obtient

$$0 \leq R_4(\frac{1}{2}) \leq \frac{231}{8192\ 2^5} = \frac{231}{262144} \approx 9e-4$$

La partie polynomiale du développement (qu'on peut vérifier avec l'instruction `TAYLR((1+X)^(1/4),X,5)` sur HP ou `taylor((1+x)^(1/4),x,4)` sur TI) est :

$$S_4(x) = 1 + \frac{x}{4} + \frac{-3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3 + \frac{-77}{2048}x^4$$

Comme $(3/2)^{1/4} = S_4(1/2) + R_4(1/2)$, on a

$$S_4(\frac{1}{2}) \leq \frac{3}{2}^{1/4} \leq S_4(\frac{1}{2}) + 9e - 4$$

On calcule $S_4(\frac{1}{2}) = \frac{36243}{32768} \approx 1.1060$.

Pour atteindre une précision de $1e-5$, on peut calculer les termes suivants du développement (par exemple à la calculatrice) et s'arrêter lorsque on passe en-dessous de $1e-5$ pour $x = 1/2$. On peut aussi observer qu'il faut améliorer la majoration sur le reste en gros par un facteur 100. Si on regarde le coefficient numérique de x^n dans le développement de Taylor, on voit qu'on passe du terme $n-1$ au suivant en multipliant par $x(\frac{1}{4} - n + 1)/n$. Ce coefficient multiplicatif est compris entre $-x$ et 0 pour $n > 1$ et tend vers $-x$ lorsque n tend vers l'infini. C'est donc la puissance de x en $x = 1/2$ qui permettra de gagner le facteur 100. Comme $2^7 = 128 > 100$, on peut affirmer que $n = 4 + 7 = 11$ conviendra.

Tant que $x < 1$, on peut faire le même calcul, puisque le reste tendra vers 0. Mais la majoration du reste sera de moins en moins bonne lorsque x s'approchera de 1. Par contre pour $x > 1$, ce n'est plus possible car le coefficient multiplicatif entre 2 termes successifs du développement de Taylor tend vers une limite $-x$ de valeur absolue plus grande que 1.

1.3 Question 3

On a :

$$x^{1/4} = 2^{e/4}(1+m)^{1/4} = (2^{1/4})^e(1+m)^{1/4}$$

On peut appliquer l'une ou l'autre des méthodes ci-dessus pour calculer $(1+m)^{1/4}$, mais la première sera la plus efficace, car elle converge même si $m = 1$ et de plus la convergence est rapide. Pour avoir une précision de 10^{-16} sur $(1+m)^{1/4}$, comme u_4 est une valeur approchée à $4e-4$ près et Newton converge de manière quadratique, on s'attend à devoir faire 3 itérations supplémentaires (u_5, u_6, devraient être des valeurs approchées de $(1+m)^{1/4}$ à $2e-7$, $4e-14$ près, donc u_7 à 10^{-16} près).

Le calcul de $(2^{1/4})^e$ entrainera une erreur relative de $|e|10^{-16}$, en effectuant la dernière multiplication, on obtiendra une erreur relative sur x de l'ordre de $(|e|+1)10^{-16}$. Pour les doubles dont l'exposant peut atteindre environ 1000, l'erreur relative sur $x^{1/4}$ pourrait être de 10^{-13}. On peut optimiser en effectuant la division euclidienne de e par 4, $e = 4q + r$ avec r compris entre -1 et 2, et en écrivant

$$x^{1/4} = 2^q(2^{1/4})^r(1+m)^{1/4}$$

l'erreur relative sur $x^{1/4}$ ne dépassera alors pas 3 10^{-16}.

2 Exercice 2

Le plus simple est de définir la fonction. Attention, vérifiez que vous êtes en mode exact sur les HP (touche MODE puis CAS du bandeau, Numeric et Approx ne doivent pas avoir de coches) ou en mode auto ou exact sur les TI. Sur les HP49 (ou les HP40 dans CAS)

```
DEFINE(F(X,Y)=1335/4*Y^6+X^2*(11*X^2*Y^2-Y^6-121*Y^4-2)+11/2*Y^8+X/(2*Y))
```

Sur les TI89/92/Voyage 200

```
Define F(x,y)=1335/4*y^6+x^2*(11*x^2*y^2-y^6-121*y^4-2)+11/2*y^8+x/(2*y)
```

Puis on les évalue en mode exact en tapant

```
F(77617,33096)
```

On trouve $-54767/66192$, signe négatif. Le même calcul en mode approché se fait en tapant

```
F(77617.,33096.)
```

On trouve sur les HP 3.08e25 et sur les TI 2e23, signe positif.

Le calcul exact donne bien entendu la bonne réponse, on constate que le calcul approché ne donne même pas le bon signe ! Ceci provient des erreurs d'arrondis, en particulier les compensations quand on soustrait deux nombres très proches, les erreurs absolues s'additionnent et peuvent devenir dominantes si la valeur absolue de la somme est petite devant la valeur absolue de chaque terme. Par exemple, si on a une erreur de 2^{-52} sur le premier terme de la soustraction $1 - 1$, le résultat varie entre $(1 + 2^{-52}) - 1 = 2^{-52}$ et $(1 - 2^{-52}) - 1 = -2^{-52}$.