Contrôle continu du 23 mars 2010, de 14h à 16h.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables ("netbooks") déconnectés du réseau autorisés.

Les deux exercices sont indépendants.

1. Méthode du point fixe et de Newton

Dans cet exercice, on va résoudre l'équation

$$2x-\ln(x^2+1)-3=0, \quad x\in[0,3] \tag{1}$$

par la méthode du point fixe, puis par la méthode de Newton. On pose :

$$f(x)=\ln(x^2+1)/2+3/2$$

1.1. (a) Calculer f', f est-elle contractante sur l'intervalle $[0,3]$?

(b) Montrer qu'il existe une unique solution r à l'équation (1) sur $[0,3]$.

(c) Combien de termes de la suite récurrente $u_{n+1}=f(u_n)$ faut-il calculer pour être sûr d'avoir une valeur approchée de r à une précision donnée ε pour tout $u_0\in[0,3]$? Donner une valeur approchée de r à `1e-8` près.

1.2. On réécrit l'équation (1) sous la forme $g(x)=0$ où $g(x)=2x-\ln(x^2+1)-3$.

(a) Donner une suite récurrente permettant de résoudre $g(x)=0$ par la méthode de Newton.

(b) Calculer g'' et étudier son signe sur $[0,3]$.

(c) Donner une valeur de u_0 telle que la suite définie ci-dessus converge vers r (on justifiera la convergence en montrant que les hypothèses de l'un des théorèmes du cours s'appliquent).

(d) Calculer u_3 pour cette valeur de u_0, puis donner une majoration de $|u_3-r|$ en utilisant une valeur approchée de $f(u_3)$.

(e) Si on fait le même calcul pour u_4 en précision machine (12 chiffres significatifs), que trouve-t-on pour $f(u_4)$? Peut-on en déduire une majoration de l'erreur $|u_4-r|$? Expliquez ce phénomène. Refaites le calcul de u_4 à partir de u_0 avec 30 chiffres significatifs, et déduisez-en une majoration de $|u_4-r|$.

2. Séries entières

On souhaite déterminer une valeur approchée de $\cos(8)$ sans utiliser une valeur approchée de π (on n'utilisera donc pas les propriétés de périodicité de cosinus)

(1) Rappeler le développement en séries entières de $\cos(x)$ en $x=0$, expliciter le reste $R_n(x)$ et donner une majoration de $|R_n(x)|$. A quel ordre faut-il s'arrêter pour assurer que $|R_n(8)|$ est plus petit que $1e-6$?

(2) On se propose d'utiliser la formule

$$\cos(2x)=2\cos(x)^2-1$$

pour réduire l'argument avant d'appliquer un développement en séries.
Calculer une valeur approchée de $\cos(1)$ à $1e-8$ près en utilisant le développement en séries, en déduire une valeur approchée de $\cos(2)$, puis de $\cos(4)$ et de $\cos(8)$. Que peut-on dire de la précision de la valeur approchée de $\cos(2)$ puis de $\cos(8)$ obtenue de cette manière ? Cette méthode vous parait-elle intéressante pour calculer $\cos(8)$? Est-elle généralisable ?