Contrôle continu du 16 mars 2007, de 8h à 10h.
Documents et calculatrices autorisés. Les deux exercices sont indépendants.

1. Exponentielle moins 1 et erreurs

(1) Comparer $f(x) = \exp(2x) - 2\exp(x) + 1$ et $g(x) = (\exp(x) - 1)^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ (où exp désigne la fonction exponentielle).

(2) Calculer à la calculatrice de manière approchée les deux expressions ci-dessus sous cette forme lorsque $x = -\mathtt{1e}-\mathtt{8}$.

(3) On suppose maintenant que $x \in [-0.1, 0[$ et on effectue des calculs exacts. Calculer la dérivée troisième de f, en déduire qu'il existe une constante C que l'on calculera, telle que

$$|f(x) - x^2| \leq Cx^3$$

En déduire que x^2 est une valeur approchée de $f(x)$, donner une majoration de l'erreur absolue puis de l'erreur relative commise.

(4) On suppose toujours que $x \in [-0.1, 0[$ et qu'on effectue des calculs exacts. Montrer que x est une valeur approchée de $\exp(x) - 1$ avec une erreur relative que l'on déterminera. En déduire que x^2 est une valeur approchée de $g(x)$ avec une erreur relative que l'on déterminera.

(5) Quelle est la plus précise des deux valeurs calculées à la question (2) ? Expliquer pourquoi.

2. Méthode du point fixe et de Newton

Dans cet exercice, on va résoudre l'équation

$$\sin(x^2) + 1/6 = x, \quad x \in [0, \frac{1}{3}] \tag{1}$$

par la méthode du point fixe, puis par la méthode de Newton. On pose :

$$f(x) = \sin(x^2) + 1/6$$

2.1. (a) Calculer f', montrer que f est contractante sur l'intervalle $[0, 1/3]$ et donner une valeur pour la constante de contractance.

(b) Montrer qu'il existe une unique solution r à l'équation (1).

(c) Combien de termes de la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in [0, 1/3]$ faut-il calculer pour être sûr d'avoir une valeur approchée de r à $\mathtt{1e}-\mathtt{2}$ près ? En déduire une valeur approchée de r à $\mathtt{1e}-\mathtt{2}$ près.

2.2. On réécrit l'équation (1) sous la forme $F(x) = 0$ où $F(x) = f(x) - x$.

(a) On applique la méthode de Newton pour résoudre l'équation (1), on construit donc une suite récurrente :

$$v_{n+1} = g(v_n)$$

Déterminer la fonction g.

(b) Calculer F'' et déterminer son signe sur $[0, 1/3]$, on pourra montrer que

$$\cos(x^2) \geq \cos(1/9) \text{ et } -x^2\sin(x^2) \geq -1/9\sin(1/9) \text{ si } x \in [0, 1/3]$$

(c) Donner une valeur de v_0 telle que la suite définie ci-dessus converge vers r (on justifiera la convergence en montrant que les hypothèses de l'un des théorèmes du cours s'appliquent).

(d) Calculer v_2 pour cette valeur de v_0, puis donner une majoration de $|v_2 - r|$ en utilisant une valeur approchée de $F(v_2)$ déterminée à la calculatrice.