Documents et calculatrices autorisés.
Les exercices 1 et 2 sont indépendants, une partie de l'exercice 2 nécessite l'usage d'une calculatrice faisant du calcul exact.

Exercice 1

On veut déterminer une valeur approchée de la racine quatrième d'un nombre réel positif. On commence par chercher une valeur approchée de $y = (1+x)^{1/4}$ pour $x \geq 0$.

1. On suppose que $x = 1$ (donc $y = 2^{1/4}$).
   Donner un polynôme $P(X)$ de degré 4, à coefficients entiers et tel que $P(y) = 0$. Donner la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ obtenue en appliquant la méthode de Newton à P.
   Donner une valeur u_0 pour laquelle la suite u_n converge vers y (justifier la convergence de la suite (u_n) pour cette valeur de u_0).
   Calculer u_4, en déduire un encadrement de $2^{1/4}$.
   Peut-on appliquer la même méthode pour $x \geq 0$ quelconque ?
2. Donner le développement de Taylor de $(1+x)^{1/4}$ en $x = 0$ à l'ordre n sous forme d'un polynôme $S_n(x)$ (de degré n) et d'un reste $R_n(x)$.
   Donner une majoration du reste $R_n(x)$ pour $n = 4$ et $x = 1/2$, en déduire un encadrement de $(3/2)^{1/4}$.
   Déterminer une valeur de n pour que S_n soit une valeur approchée de y à 10^{-5} près pour tout $x \in [0, 1/2]$.
   Peut-on faire de même pour calculer y lorsque $x > 1/2$?
3. On suppose qu'on a calculé $2^{1/4}$ à 10^{-16} près. Proposer une méthode permettant de calculer une valeur approchée de $x^{1/4}$ pour $x \geq 0$, en utilisant l'écriture mantisse-exposant de x en base 2 :
   $$x = 2^e(1+m), \quad e \in \mathbb{Z}, m \in [0, 1[$$
   et en utilisant l'une des méthodes ci-dessus. Discuter la précision de l'approximation obtenue.

Exercice 2

Déterminer la valeur et le signe de la fraction rationnelle

$$F(x,y) = \frac{1335}{4}y^6 + x^2(11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2) + \frac{11}{2}y^8 + \frac{x}{2y}$$

en $x = 77617$ et $y = 33096$ en faisant deux calculs, l'un en mode approché et l'autre en mode exact. Que pensez-vous de ces résultats ?