Examen du jeudi 17 juin 2010, de 14h15 à 17h15.
Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables (netbooks) autorisés.
Ce sujet comporte 2 pages.
Les netbooks empruntés devront être rendus en B118 à l'issue de l'examen.

1. Exercice

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -48 & -70 & 86 \\ -70 & 144 & 54 \\ 86 & 54 & 8 \end{pmatrix}$$

Soit v_0 un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^3$. Calculer les vecteurs $v_1 = Av_0$, $v_2 = Av_1$, $v_3 = Av_2$, déterminer l'ensemble des relations linéaires entre v_0, v_1, v_2, v_3 et en déduire le polynôme caractéristique de A.

2. Exercice

Donner le développement en séries entières en $x = 0$ de

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

En déduire celui de

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Donner une majoration du reste R_N à l'ordre $N > 0$ pour $x \in [-1, 1]$. En déduire une valeur approchée de $F(1)$ à $1e - 10$ près.

3. Problème

Le but de ce problème est de calculer pour $x \in [0, 1]$ donné une approximation de l'intégrale définie par :

$$(E) \qquad F(x) = \int_0^x \exp(\exp(t))\, dt$$

où exp désigne la fonction exponentielle, on notera :

$$f(t) = \exp(\exp(t))$$

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment, sauf la dernière question de la 2ème partie.

3.1. Valeur approchée de $F(x)$ par intégration numérique.

(1) Calculer la dérivée quatrième de f. Déterminer la valeur du maximum de $|f^{[4]}(t)|$ pour $t \in [0, 1]$, que l'on notera M_4.

(2) Déterminer le nombre N de subdivisions qui assure que la méthode de Simpson donne une valeur approchée de $F(1)$ à $1e - 4$ près et à $1e - 8$ près. Calculer une valeur approchée de $F(1)$ à $1e - 8$ près.

(3) Soit $x \in [0, 1]$. Déterminer le nombre N de subdivisions qui assure que la méthode de Simpson donne une valeur approchée de $F(x)$ à $1e - 8$ près, on exprimera N en fonction de x.

(4) Pourrait-on calculer une valeur approchée de $F(x)$ par un développement en séries entières ? Si oui, indiquez comment procéder, si non, expliquez pourquoi.

3.2. **Calcul approché de F par interpolation de Lagrange.** On suppose connu (à une précision suffisante) la valeur de F en certains points, par exemple 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, on pourra déterminer numériquement la valeur de F en ces points avec Xcas :

```
F(x):=int(exp(exp(t)),t=0..x);F(0.5);
```

(1) Rappeler la valeur de F' en fonction de f.

(2) Calculer la dérivée 5-ième de F, déterminer son maximum sur $[0,1]$, en déduire une majoration de l'erreur commise si on approche F sur $[0,1]$ par son polynôme de Lagrange en 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1. Donner une valeur approchée de $F(0.9)$ et une majoration de l'erreur par cette méthode.

(3) On décompose l'intervalle $[0,1]$ en 50 subdivisions. Sur chaque subdivision, on approche F par son polynôme de Lagrange obtenu par interpolation aux 2 points extrémités et au point milieu de la subdivision (le polynôme obtenu sur chaque subdivision est donc de degré au plus 2). Donner une majoration de l'erreur commise et donner le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour obtenir la valeur approchée de F.

(4) Déterminer le nombre N de valeurs de x où il faut calculer au préalable la valeur de $F(x)$ pour pouvoir faire l'approximation ci-dessus. Quelle serait la majoration de l'erreur commise si on appliquait l'interpolation de Lagrange globalement sur $[0,1]$ avec ces N valeurs de x et $F(x)$ (donc avec un polynôme de degré au plus $N-1$) ? Est-ce judicieux ?

(5) Peut-on approcher F par interpolation de Lagrange de manière plus précise que précédemment, en utilisant les mêmes N valeurs de x et $F(x)$ mais avec un autre choix de nombre de subdivisions et de degré maximal des polynômes d'interpolations sur chaque subdivision ?

(6) Comparer les avantages et inconvénients de l'approximation de F par calcul approché direct d'intégrale par la méthode de Simpson et par approximation de Lagrange en termes de nombre d'opérations et de précision.