Exercice 1 : (Intégrale)
Soit $f \in C_0(\mathbb{R})$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, t_0 + T]$$

1. Donner la solution exacte de cette équation.
2. Trouver des solutions approchées de $y(t_0+T)$ en la résolvant par la méthode d'Euler, la méthode du point milieu et la méthode de Runge-Kuta RK4 avec un pas constant. A quelles méthodes d'intégration ces méthodes correspondent-elles ?

Exercice 2 : (Euler explicite et point milieu)
Écrire deux fonctions Xcas prenant en argument une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, des réels $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ et un entier N et retournant la valeur approchée de la solution du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ au temps $t = t_0 + T$ par :

1. la méthode d'Euler
2. la méthode du point milieu

avec un pas constant $h = T/N$.
Tester ces fonctions pour $f(t, y) = 1$, $f(t, y) = t$ et $f(t, y) = t^2$; expliquez quand c'est le cas pourquoi les résultats ne varient pas avec N. Testez ensuite pour $f(t, y) = y$, $f(t, y) = ty$

Exercice 3 : (Erreurs d'arrondi)
Soit le problème de Cauchy

$$y'(t) = y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 1]$$

1. Rappeler la solution exacte de l'équation puis donner la solution approchée y_N de $y(1)$ par la méthode du point milieu avec un pas constant $h = 1/N$. Montrer que $y_N \to y(1)$ quand $N \to \infty$.
2. Donner une majoration de l'erreur locale de la forme $|e_n| \leq Ch^3$ où C est une constante indépendante de n que l'on déterminera, en déduire une majoration de l'erreur globale.
3. On suppose qu'à chaque pas il y a une erreur d'arrondi ϵ_n, de sorte que la solution approchée est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} w_{n+1} & = & w_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, w_n + \frac{h}{2} f(t_n, w_n)\right) + \epsilon_n \\ w_0 & = & 1 \end{array} \right. , \quad f(t, y) = y$$

   Montrer la majoration suivante de l'erreur globale

$$E = \max_{0 \leq n < N} |y(t_n) - w_n| \ \leq \ M \left(\frac{C}{N^2} + N\epsilon \right) \tag{1}$$

avec $M \leq e^{1,5}$ et $\epsilon = \max_{0 \leq n < N} |\epsilon_n|$. En prenant $\epsilon =$`1e-15`, trouver le nombre d'itérations optimal N_{opt} en minimisant le membre de droite de l'inégalité (1).

4. En utilisant la fonction Xcas de l'exercice précédent, donner les valeurs numériques de l'erreur $|y(1) - w_N|$ pour différentes valeurs de N comprises entre 10^4 et 10^6. Comparez vos résultats avec votre prédiction théorique de N_{opt}.

Exercice 4 : (Équation d'ordre > 1)
On considère l'équation différentielle

$$x'' = x \tag{2}$$

1. Résoudre cette équation exactement en l'écrivant sous la forme de deux équations couplées du premier ordre puis en intégrant ces équations.
2. Donner l'algorithme permettant de trouver une solution approchée de (2) par la méthode d'Euler. Écrire une fonction Xcas qui résoud (2) pour les conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 2$ par cette méthode.

Exercice 5 : (Runge-Kutta 4)
Écrire une fonction Xcas prenant en argument

— une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
— des réels $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et $T > 0$
— un entier N

et retournant un vecteur donnant les valeurs approchées de la solution du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ au temps $t_n = t_0 + nhT$, $0 \leq n < N$, par la méthode de Runge-Kuta RK4 avec un pas constant $h = T/N$. Testez votre fonction sur quelques exemples pour lesquels vous connaissez la solution exacte. Tracez la courbe de l'erreur $y(t_n) - y_n$ en fonction du temps.

Exercice 6 : (Euler implicite)
Écrire une fonction Xcas implémentant la méthode d'Euler implicite, et comparer numériquement les erreurs avec Euler explicite par exemple pour $y' = y, y(0) = 1$.

Exercice 7 : (Pas variable)
Soit $f : (t,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(t,y) \in \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne en y de rapport k. Soit $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T$. On pose $p_n = f(t_n, y_n)$ et $h_n = t_{n+1} - t_n$ pour tout $n = 0, \cdots N-1$.

1. Montrer que l'erreur locale (erreur de consistance) e_n de la méthode d'Euler avec les pas variables h_n vaut :

$$e_n = \frac{h_n}{2}\big(p_{n+1} - p_n\big) + o(h_n)$$

2. On veut contrôler le pas h_n de manière à ce que l'erreur globale théorique (c'est-à-dire sans prendre en compte les erreurs d'arrondis) $E_{\text{th}} = \max_{0 \leq n < N}\{|y(t_n) - y_n|\}$ soit inférieure à une valeur $\delta > 0$ fixée à l'avance. Montrer que, pour h_n suffisamment petit, une condition suffisante pour avoir $E_{\text{th}} \leq \delta$ est :

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{2} < \frac{\delta}{MT} \quad \text{avec} \quad M = e^{kT}\ .$$

3. Modifier votre fonction de l'exercice 2.1) en prenant un pas variable $h_n \in [h_{\min}, h_{\max}]$ (les pas minimum $h_{\min}$ et maximum $h_{\max}$ seront donnés en arguments de la fonction) tel que $h_0 = \sqrt{h_{\min} h_{\max}}$ et
— si $\frac{|p_{n+1}-p_n|}{2} < \frac{\delta}{3MT}$ alors $h_{n+1} = \min\{1.25 h_n, h_{\max}\}$
— si $\frac{|p_{n+1}-p_n|}{2} > \frac{\delta}{MT}$ alors $h_{n+1} = 0.8 h_n$ avec arrêt si $h_{n+1} < h_{\min}$ ou si $n = 0$.
— sinon $h_{n+1} = h_n$
Application : résoudre numériquement

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & \frac{y}{1-t} \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. \quad , \quad t \in [0, 0.8] \tag{3}$$

avec une précision $\delta = 10^{-2}$. Trouver la solution exacte de (3). Pourquoi selon vous la précision obtenue est-elle meilleure que 10^{-2} ?