Exercice 1. On utilise la méthode de dichotomie pour résoudre une équation $f(x) = 0$ avec $x \in [a, b]$. On veut une approximation d'une solution à $\varepsilon > 0$ près. Montrer qu'on aura besoin d'au plus $\lceil \ln_2(b-a) - \ln_2 \varepsilon \rceil$ itérations de l'algorithme, où $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ désignent respectivement le plus grand entier inférieur à x et le plus petit entier supérieur à x.
Comparer avec une méthode de point fixe $g(x) = x$ (telle que $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$) de constante de contractance $k < 1$.
Exemple on prendra $g(x) = \cos(x)$ sur $[0, 1]$.

Exercice 2. Méthode de Newton-Heron
Soit $a > 0$ et n un entier supérieur ou égal à 2. Appliquer la méthode de Newton pour déterminer une valeur approchée de $a^{\frac{1}{n}}$. On donnera une valeur de départ u_0 de la suite qui garantit la convergence.
Illuster pour $n = 2, n = 3$ et $a = 2, a = 3$. Donner une majoration de l'erreur pour u_4 et u_5 lorsque $u_0 = a$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan(\mathrm{x})$.
L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution 0.
Pour quelles valeurs de x_0 la méthode de Newton converge-t'elle ?

Exercice 4. Vitesse de convergence quadratique, d'ordre p.
On dit que la suite converge avec une *vitesse d'ordre au moins* p s'il existe $C > 0$ tel que $|x_{n+1} - x| \leq C|x_n - x|^p$ à partir d'un certain rang. Comment se comporte le nombre de décimales exactes d'une suite convergent à vitesse au moins p lorsque $p > 1$? Calculer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision de n décimales. Comparer avec une suite convergeant à vitesse quadratique ou linéaire. Dicuster l'intérêt de telles méthodes.

Exercice 5. Méthode de la sécante : si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés, au lieu de faire une dichotomie, on prend la corde reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$, c l'abscisse de l'intersection avec l'axe des x puis on copie b dans a et c dans b. Tester pour $f(x) = x^2 - 2$ sur $[1, 2]$.

Exercice 6. On considère les applications définies sur $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ par

$$F(x,y) = (1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}, 1 + \frac{1}{4}\sqrt[4]{x^4+y^4}), \quad \Phi(x,y) = F(x,y) - (x,y)$$

1. Montrer que F est de classe C^∞ sur Ω et calculer F'.
2. Rappeler l'inégalité des accroissements finis pour les applications de classe C^1 définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que la norme triple d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ relative à la norme euclidienne vérifie : $|||A||| \leqslant \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2}$ (indication : utiliser Cauchy-Schwarz pour majorer chaque coordonnée de $A(x,y)$)
4. Montrer que F est contractante sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Indication : se ramener par homogénéité en une variable et faire une étude de fonction.
5. Montrer que $[1, +\infty[\times[1, +\infty[$ est stable par F.
6. Déduire que la suite définie par $(x_0, y_0) = (1, 1)$ et $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n)$ converge vers $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$.
7. Montrer que Φ' est inversible pour tout $(x, y) \in \Omega$.

8. La méthode de Newton-Raphson pour résoudre $\Phi(x,y) = (0,0)$ consiste à itérer une certaine application N. Décrire explicitement N.
9. Observer la convergence de la suite $(x_k, y_k)_k$.

Exercice 7.
Ecrire un programme itérant la méthode de dichotomie et la méthode de Newton pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'utiliser pour calculer $\sqrt{2}$. Tracer le nombre de décimales exactes en fonction du nombre d'itérations.
On appliquera ensuite la méthode de Newton à la fonction $x \mapsto \sin \pi x$ et on tracera le dixième itéré de la suite en fonction du point de départ de l'algorithme. Qu'observez-vous ?

Exercice 8. Utiliser la méthode de Newton pour résoudre $xe^{-x^2} = 0$ d'une part pour $x_0 = 0.52$ et d'autre part pour $x_0 = 0.42$.

Exercice 9.
Dessiner le graphe des courbes planes d'équations $x^2 + y^3 - x - y = 0$ et $x^4 + xy - y^2 - 2 = 0$ (on pourra utiliser la commande `implicitplot`). Combien y a-t-il de solutions au système (non-linéaire) suivant $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^3 - x - y = 0 \\ x^4 + xy - y^2 - 2 = 0 \end{array} \right.$?
Donner une estimation grossière de chaque solution, puis raffiner cette estimation en utilisant la méthode de Newton.
Voir aussi les fonctions `solve` (pour des systèmes polynomiaux) et `fsolve` (approché).

Exercice 10. Soit P une matrice transposée d'une matrice stochastique, c'est-à-dire une matrice carrée de taille N dont les coefficients vérifient

$$a_{ij} \in [0,1], \quad \sum_{i=1}^{N} a_{ij} = 1$$

la somme des coefficients d'une colonne donnée vaut 1.
L'algorithme PageRank de Google construit une telle matrice à partir du graphe connectant les pages web entre elles en posant $a_{ij} = \frac{1}{n_j}$ si la page j pointe vers la page i et 0 sinon, avec n_j le nombre de liens émis par la page j (chaque lien représente en quelque sorte un vote, dont le poids est pondéré par le nombre de liens). Par exemple

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

correspondrait à un web jouet de 5 pages où la page 1 pointe vers les pages 3 et 5, la page 2 vers la page 3, la page 3 vers 1, 2, 4, 5, la page 4 vers les pages 3 et 5 et la page 5 vers elle-même.
On s'intéresse à l'équation :

$$r = (1-\alpha)Pr + \alpha\frac{1}{N}(1, ..., 1), \quad \alpha \in]0,1[$$

Dans PageRank $\alpha = 0.15$ et r_j donne le rang de classement de la page j

1. Déterminer la norme de P comme application linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ subordonnée à la norme L^1 dans $\mathbb{R}^N$

$$|||P|||_1 = \max_{\{r/\|r\|_1=1\}} \|Pr\|_1, \quad \|r\|_1 = \sum_{j=1}^{N} |r_j|$$

2. En déduire que la méthode du point fixe permet de résoudre le problème.

Exercice 11 : Domaine de Gershgorin
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note, pour $1 \le i \le n$, D_i la boule fermée dans $\mathbb{C}$ de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Le domaine de Gershgorin, qu'on notera $\mathcal{G}(A)$ est la réunion des disques D_i pour $1 \le i \le n$. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathcal{G}(A)$.

Exercice 12 (Méthode de la puissance)
Soit $A = \begin{pmatrix} 99 & 1 & 0 \\ 1 & 100 & 1 \\ 0 & 1 & 98 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et en utilisant l'exercice précédent que ses valeurs propres appartiennent à $[97, 102]$.
2. Déterminer par la méthode de la puissance une approximation de la plus grande valeur propre de A.
   Pour ceci, on écrira une fonction qui donnera une valeur approchée de la plus grande valeur propre, une valeur approchée d'un vecteur propre associé et le nombre d'itérations utilisées pour ce calcul. La fonction aura comme argument une matrice carrée, un nombre d'iterations maximales (pour un test d'arrêt) et epsilon mesurant une erreur maximale.
3. Expliquer pourquoi en appliquant la méthode de la puissance à $A - 97I_3$, on accélere la convergence.
4. Que se passe t-il si on applique la méthode de la puissance à $A - \gamma I_3$ si γ est la valeur trouvée à la question 2) ?

Exercice 13 (élimination)
Soit A une matrice réelle de taille n. On suppose que les valeurs propres de A notées $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sont deux à deux distinctes et vérifient :

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

On note u_i un vecteur propre associé à λ_i, pour $1 \le i \le n$.

1. Montrer que $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sont les valeurs propres de ${}^tA$. On note v_i un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_i, pour $1 \le i \le n$.
2. Montrer que si $i \neq j$, $\langle u_i, v_j \rangle = 0$. (On pourra calculer $\langle Au_i, v_j \rangle$ de deux manières).
   Montrer que pour tout $1 \le i \le n$, $\langle u_i, v_i \rangle \neq 0$.
3. Soit $B = A - \lambda_n \frac{u_n \, {}^tv_n}{\langle u_n, v_n \rangle}$. Montrer que les valeurs propres de B sont $\{0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$.
4. Donner une méthode utilisant la méthode de la puissance appliquée plusieurs fois pour trouver des valeurs approchées des valeurs propres de A et de ses vecteurs propres.
   L'appliquer à la matrice de l'exercice précédent.

Exercice 14 (valeurs propres conjuguées)
Si A est une matrice réelle, sa plus grande valeur propre en module n'est pas forcément réelle, A peut avoir un couple de valeurs propres complexes conjuguées de module maximal. On peut appliquer la méthode de la puissance à un shift de A dans le complexe, par exemple $A - iI$, on peut aussi rester dans le réel en cherchant une relation de récurrence approchée $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n$ (où $u_{n+1} = Au_n$ et u_0 aléatoire). Programmer les deux méthodes et comparer l'efficacité avec une matrice aléatoire réelle de taille 4 (non symétrique).

Exercice 15 (itérations inverses)
Lorsqu'on a effectué quelques itérations de la méthode de la puissance, on a une première approximation λ de la valeur propre de module maximal. Il peut alors être intéressant d'effectuer

la méthode de la puissance sur la matrice $(A-\lambda I)^{-1}$. Programmer cette méthode et discuter les avantages (vitesse de convergence) et inconvénients (précision du calcul de l'inverse). Testez sur l'une des matrices de la feuille.

Exercice 16

Utiliser la méthode de la puissance pour déterminer la norme triple d'une matrice subordonnée à la norme euclidienne.

Exercice 17

Soit A la matrice du laplacien discret de taille n (2 sur la diagonale et -1 sur les deux diagonales adjacentes). On rappele que

$$u_k = (\sin(\frac{k\pi}{N+1}), ..., \sin(\frac{kj\pi}{N+1}), ..., \sin(\frac{kN\pi}{N+1}))$$

est vecteur propre de A. Appliquer la méthode du gradient à pas constant pour déterminer les solutions du système $Ax = b$ en considérant la fonctionnelle $J(x) = \frac{1}{2} < Ax|x > - < b|x >$. Quel valeur de pas peut-on prendre pour assurer la convergence ? Comparer avec la méthode de Jacobi.

Exercice 18

Programmer la méthode du gradient à pas constant pour trouver le minimum de la fonction $f(x, y) = x^4 - x^3 + 2xy + y^2 - 2y + 1$. Illustrer du mieux possible le chemin parcouru par les différentes étapes de l'algorithme.

Exercice 19

Soit $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$J((x_1, x_2)) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1 \cos x_2$$

Illustrer sur cet exemple les méthodes de descente de gradient, à pas fixe, à pas optimal et la méthode de Newton pour les zéros du gradient.

On fera varier le pas pour le pas fixe, le point de départ. On choisira un test d'arrêt $\|\nabla J(x)\| < 10^{-6}$. On comparera le nombre d'itérations pour chacune des méthodes. On représentera graphiquement la suite des itérées.

Exercice 20

Utiliser la méthode QR pour trouver des valeurs approchées des valeurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observer la forme des matrices intermédiaires. Pour une matrice générale, on utilise la forme de Hessenberg avant de faire la méthode QR.

Exercice 22

Si A est une matrice symétrique, et si $\|(A-\lambda)u\| \leq \varepsilon\|u\|$, montrer que la distance de λ au spectre de A est inférieure à ε (on pourra utiliser une base orthonormale de vecteurs propres de A).

On considère l'équation différentielle

$$-u'' + \alpha u = f, \quad x \in [0,1], \quad u(0) = u(1) = 0$$

1. Discuter en fonction de α le nombre de solutions pour $f = 0$. Comparer les conditions aux bords avec le cas des conditions initiales $u(0) = 0, u'(0) = 0$.
2. On pose $\alpha > 0$. Déterminer a et l de la formulation "faible" de cette équation $a(u,v) = l(v)$ pour tout v de classe C^1 par morceaux nulle aux bords.
3. Montrer que a est symétrique définie positive.
4. Vérifier que la solution de $a(u,v) = l(v)$ est un extrêmum de $J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - l(u)$ (formulation variationnelle de l'équation différentielle).
5. Soit $N \geq 2$, $h = 1/N$ et $x_k = kh = k/N$ pour $k = 0, ..N$.
   Pour $1 \leq k \leq N-1$, on note $\phi_k(x) = \max(0, 1 - |(x - x_k)/h|)$ la fonction atteignant son maximum 1 en x_k et de pente $\pm 1/h$ entre $[x_{k-1}, x_{k+1}]$.
   On va chercher le minimum de J sur l'espace vectoriel E de dimension finie engendré par les fonctions ϕ_k (c'est la projection orthogonale par rapport au produit scalaire induit par a de la solution sur E, pourquoi ?) Déterminer $a_{j,k} = a(\phi_j, \phi_k)$, $l_k = l(\phi_k)$.
6. Montrer que le minimum u de J sur E vérifie $a(u,v) = l(v)$ pour tout $v \in E$. En déduire une matrice A telle que $A(u(x_j))_{j=1..N-1} = (l_j)_{j=1..N-1}$.
7. Déterminer $u(x_j)$ puis u.
8. Tracer sur une même figure u et la solution exacte pour $f(t) = 1$ et pour $f(t) = t(1-t)$ pour $N = 3$ et $N = 10$.
9. Pour N grand, quel est le cout de l'étape matricielle de la résolution par le pivot de Gauss ? Comparer avec la méthode de Jacobi.
10. Que faut-il modifier lorsque α dépend de x ? Comment se compare cette méthode avec la méthode des différences finies de la feuille 1 ?