DM3

1 Exercice

Déterminer l'expression en fonction de n des suites récurrentes x_n, y_n, z_n définies par la récurrence linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + y_n + 3z_n \\ y_{n+1} & = & x_n + 3y_n + z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n + y_n + z_n \end{array} \right.$$

2 Problème

Le but de ce problème est de réduire un endomorphisme ϕ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$ sans calculer le polynôme caractéristique $C(X)$, défini ici comme étant le déterminant de $XI - A$. Pour $v \in \mathbb{R}^d$ fixé, on définit la suite récurrente $v_n \in \mathbb{R}^d$ par $v_0 = v$ et $v_{k+1} = Av_k$.

2.1 Partie 1

1. Commençons par un exemple dans $\mathbb{R}^3$ ($d = 3$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   et $v_0 = (1, 0, 0)$. Calculer v_1, v_2, v_3. Exprimer v_3 comme combinaison linéaire de $\{v_0, v_1, v_2\}$. On va voir qu'elle donne le polynôme caractéristique.
2. On se place à nouveau dans le cas général. Montrer que la famille $\{v_0, ..., v_d\}$ est liée. En déduire qu'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)v = 0$ dont on majorera le degré.
3. Soit $P_1(X)$ et $P_2(X)$ deux polynômes vérifiant $P_1(A)v = 0$ et $P_2(A)v = 0$ et soit $R(X)$ le reste de la division euclidienne de $P_1(X)$ par $P_2(X)$. Calculer $R(A)v$.
4. Soit $M(X)$ un polynome non nul de degré minimal m tel que $M(A)v = 0$. Montrer que tout polynôme vérifiant $P(A)v = 0$ est un multiple de $M(X)$. On peut donc normaliser $M(X)$ en imposant que son coefficient dominant vaut 1.
5. Soit μ une racine de M et $M_1 = M/(X - \mu)$. Montrer que

$$(A - \mu I)M_1(A)(v) = 0 \tag{1}$$

   Montrer que $M_1(A)v \neq 0$, en déduire un vecteur propre de A associé à μ. Exprimer ce vecteur propre comme combinaison linéaire de $v_0, ..., v_{m-1}$ en fonction des coefficients de $M_1(X)$.
6. On suppose que la famille $\mathcal{F} = \{v_0, ..., v_{d-1}\}$ est libre. Montrer qu'il existe $\lambda_0, ..., \lambda_{d-1}$ tels que

$$v_d = \lambda_0 v_0 + ... + \lambda_{d-1} v_{d-1}$$

   Montrer que $M = X^d - \lambda_{d-1}X^{d-1} - ... - \lambda_0$.
7. Calculer les racines de $M(X)$ pour la matrice de l'exemple, puis des vecteurs propres associés à chaque racine (en utilisant (1)).

2.2 Partie 2 : bonus

Cette section ne fait pas partie du DM3

On va ici faire le lien avec le polynôme caractéristique, et déterminer un cas générique où la méthode de diagonalisation précédente fonctionne.

1. On suppose que la famille $\mathcal{F} = \{v_0, ..., v_{d-1}\}$ est libre. Quelle est la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{F}$? Calculer le polynôme caractéristique de cette matrice et en déduire que $M(X) = C(X)$.
2. On admettra qu'en général $M(X)$ est un diviseur du polynôme caractéristique $C(X)$ (pour le montrer, multiplier $XI - A$ par sa comatrice, on trouve $C(X)I$, donc le reste de la division de $C(X)$ par $XI - A$ est $0 = C(A)$). Lorsque $M(X)$ est de degré $d - 1$, on définit μ par
$$\frac{C}{M} = X - \mu$$
et on note m le coefficient de degré $d - 2$ de M. Montrer que
$$-\text{trace}(A) = \mu - m$$
Déterminer le polynôme caractéristique de A lorsque la famille $\{v_0, ..., v_{d-1}\}$ est liée mais la famille $\{v_0, ..., v_{d-2}\}$ est libre.
3. On suppose dans la suite que ϕ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que toutes ses valeurs propres sont distinctes. Soit $\{w_1, ..., w_d\}$ une base de vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres $\mu_1, ..., \mu_d$. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_d$ les coordonnées de v_0 dans cette base propre. Calculer les coordonnées de v_1 puis de $v_2, ..., v_{d-1}$ dans la base propre. En déduire que la famille $\{v_0, ..., v_{d-1}$ est libre si et seulement si tous les α_i sont non nuls (indication : le déterminant est de type Vandermonde).
4. Expliquez pourquoi on a de bonnes chances de trouver le polynôme caractéristique de A lorsqu'on choisit v_0 au hasard.