Barême : Noté sur 24, puis multiplication par 0.9.

## 1. Nombres approchés et arctangente (4 points)

Si $x$ est un réel tel que $|x| \leq 2^{-26}$, alors

$$0 \leq \frac{x^2}{3} \leq \frac{2^{-52}}{3} < 2^{-53}$$

donc sur un ordinateur représentant les nombres approchés avec une précision relative de $2^{-53}$, le réel $1 - x^2/3$ est représenté par 1. Pour les mêmes raisons, $x - x^3/3$ est représenté par $x$ (pour calculer l'erreur relative il faut diviser $x^3/3$ par $x$ ce qui donne la même chose que $x^2/3$ divisé par 1).

Pour $|x| \leq 1$, le développement en séries de $\arctan(x)$ est une série alternée, donc

$$x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$$

Les deux extrémités de l'égalité sont représentées par le même nombre, donc le milieu aussi, on peut légitimement renvoyer $x$ pour $\arctan(x)$ lorsque $|x| \leq 2^{-26}$.

## 2. Lagrange et Taylor (7 points)

Le développement de Taylor $T_2$ de la fonction $f(x) = e^x$ en $x = 0$ est

$$T_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Le polynome de Lagrange $L_2$ de degré 2 dont le graphe passe par les points d'abscisses $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$, peut se calculer de plusieurs façons, par exemple comme dans le cours, on commence par le point d'abscisse $x = 0$ $L_0(x) = e^0 = 1$, puis on pose $L_1(x) = L_0 + a(x-0)$, on détermine $a$ par $L_1(1) = e^1 = 1+a$, donc $L_1(x) = 1 + (e-1)x$, et enfin on pose $L_2 = L_1 + bx(x-1)$, on détermine $b$ par $L_2(2) = e^2 = -1 + 2e + 2b$, finalement

$$L_2(x) = 1 + (e-1)x + \frac{e^2 - 2e + 1}{2} x(x-1)$$

En observant les 3 graphes sur une calculatrice sur l'intervalle $[0,2]$, on voit que $T_2$ est plus proche de $f(x)$ près de 0 et $L_2$ près de 2. Globalement, $L_2$ semble plus approprié pour approcher $f$, le graphe de $T_2$ s'éloigne sensiblement de celui de $f$ près de $x = 2$.

On sait qu'il existe $\theta \in [0,x]$ tel que

$$|f(x) - T_2(x)| = \frac{x^3}{3!} f^{[3]}(\theta)$$

comme $f^{[3]}(\theta) = e^\theta$ qui est croissante, on a

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{x^3}{3!} e^x$$

On voit bien que plus on s'éloigne de $x$, plus la majoration de l'erreur est grande, au point de valoir $8/6e^2 \approx 9.85$ en $x=2$. En fait cette majoration n'est pas optimale, si on calcule la différence $|f-T_2|$ à la calculatrice en $x=2$, on trouve environ $2.39$.

Pour Lagrange, on sait qu'il existe un (autre) $\theta \in [0,x]$ tel que

$$|f(x)-L_2(x)| = \frac{f^{[3]}(\theta)}{3!}|x(x-1)(x-2)| \leq \frac{e^x}{6}|x(x-1)(x-2)|$$

On peut ensuite majorer $|x(x-1)(x-2)|$ par 2 comme dans le cours, en distinguant deux cas, $0 \leq x \leq 1$ (dans ce cas les 2 premiers facteurs sont plus petits que 1 en valeur absolue, et le dernier plus petit que 2) et $1 \leq x \leq 2$ (meme chose mais dans l'autre sens). On peut aussi étudier la fonction $x(x-1)(x-2)$ sur l'intervalle $[0,2]$ et prendre le plus grand des valeurs absolues de son maximum et de son minimum, cela donne une majoration un peu meilleure. La dérivée vaut $3x^2-6x+2$, elle s'annule en $x = 1 \pm \sqrt{3}/3$, en remplaçant dans $x(x-1)(x-2)$ on trouve $\mp 2\sqrt{3}/9$. Finalement

$$|f-L_2| \leq \frac{e^2}{6}\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.47$$

ce qui est bien meilleur que la majoration de $|f-T_2|$ (la majoration de $|f-L_2|$ n'est pas non plus optimale, on pourrait améliorer en majorant $e^x x(x-1)(x-2)$ au lieu de majorer $e^x$ et $x(x-1)(x-2)$ séparément).

## 3. Méthode de Newton

Dans cet exercice on considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 3x^3 - 10x^2 - 4x + 8.$$

**3.1.** On calcule $f(-1)$ à $f(4)$ par pas de 1 et on trouve -1,8,-3,-16,-13,24. Comme $f$ est continue, elle s'annule pour $a$ entre -1 et 0, $b$ entre 0 et 1 et $c$ entre 3 et 4. Comme $f$ est un polynome de degré 3 de coefficient dominant 3, on peut d'ailleurs en déduire que

$$f(x) = 3(x-a)(x-b)(x-c) \tag{1}$$

**3.2.** (a) La dérivée de $f$ est $f'(x) = 9x^2 - 20x - 4$, polynome de degré 2 de coefficient dominant positif et dont les racines sont $\alpha_\pm = (10 \pm 2\sqrt{34})/9$ (valeurs approchées arrondies $-0.18$ et $2.41$). La fonction $f$ est décroissante entre les 2 racines de $f'$ et croissante en-dehors.

La dérivée seconde de $f$ est $f''(x) = 18x - 20$ qui est positive si et seulement si $x > 10/9$ (valeur approchée arrondie $1.11$). Donc $f$ est concave si $x < 10/9$ et convexe si $x > 10/9$.

(b) Sur $[3,4]$, $f$ est croissante et convexe, il suffit donc de prendre $u_0 \leq c$ dans $[3,4]$ pour que la suite définie par

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

soit décroissante et convergente vers $c$.

(c) Sur $[0,1]$, $f$ est décroissante et concave, il faut donc prendre $u_0 \geq b$ pour avoir une suite décroissante vers $b$, donc $u_0 = 1$. Sur $[-1,a]$, $f$ est concave. De plus, $\alpha_- > a$ car $f(\alpha_-) \geq f(0) = 8 > 0 = f(a)$, donc $f$ est croissante sur $[-1,a]$, on va donc choisir $u_0 \leq a$ pour avoir une suite croissante vers $a$ soit $u_0 = -1$.

**3.3.** (a) En itérant 3 fois la suite à partir de -1.0, on obtient $\hat{a} = -0.958712932805$, à partir de 1.0, $\hat{b} = 0.795501619928$, à partir de 4.0, $\hat{c} = 3.49656466663$. On peut aussi faire le calcul en mode exact, on obtient par exemple pour $c$ :

$$\hat{c} = \frac{8136292986}{2326939085}$$

(b) Comme $f(c) = 0$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in [c,\hat{c}]$ tel que :

$$\hat{c} - c = \frac{f(\hat{c})}{f'(\theta)} \leq \frac{f(\hat{c})}{f'(3)}$$

car $f'$ est croissante. On a $f(\hat{c}) \approx 7e-4$ et $f'(3) = 17$, donc

$$|\hat{c} - c| \leq 4.3e-5$$

(c) D'après (1), il est judicieux de développer $3(x-\hat{a})(x-\hat{b})(x-\hat{c})$ pour tester nos calculs, on obtient

$$3 * x^3 - 10.0000600612 * x^2 - 4.00000980267 * x + 8.00004580621$$

Ce n'est pas tout-à-fait $f(x)$ mais les erreurs sont du bon ordre de grandeur, cf. le calcul précédent de l'erreur sur $\hat{c}$.

**3.4.** Si on prend $u_0 = 0$ (ou $u_0 = 2$) la suite oscille entre ces 2 valeurs et ne converge donc pas. Ceci montre que l'on n'est pas dans les conditions d'application du théorème du cours, En effet sur $[a,0]$, la fonction $f$ n'est pas monotone (croissante puis décroissante). Sur $[0,b]$, la fonction $f$ est concave et décroissante (on est du mauvais coté de $b$). De même sur $[b,2]$ la fonction $f$ change de sens de convexité. Enfin sur $[2,c]$ la fonction $f$ n'est pas monotone.